



FACHBEREICH PHYSIK
BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Nukleonenzerfall und Neutrinoeigenschaften in einem Massenmodell auf der Grundlage einer $SO(10)$ -Grand Unified-Theorie

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
am Fachbereich Physik der Bergischen Universität
Gesamthochschule Wuppertal

vorgelegt von
Carsten Merten

WUB-DIS 99-14
Dezember 1999



FACHBEREICH PHYSIK
BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Nukleonenzerfall und Neutrinoeigenschaften in einem Massenmodell auf der Grundlage einer $SO(10)$ -Grand Unified-Theorie

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
am Fachbereich Physik der Bergischen Universität
Gesamthochschule Wuppertal

vorgelegt von
Carsten Merten

WUB-DIS 99-14
Dezember 1999

*Wo Du das Nichts erblickst, ist eine Kraft,
Verborgen, unerreichbar allem Bösen,
Die aus sich selbst – sich und die Welt erschafft.
Und die vermag's, das Rätsel aufzulösen.*

Michael Ende, *Das Gauklermärchen*

Abstract

The Standard Model (SM) of elementary particle physics is a very successful theory. Its predictions have been tested experimentally to a high level of accuracy. However, the SM is not considered to be a fundamental theory of nature. It contains a lot of arbitrary parameters especially in the fermionic sector and it cannot give small neutrino masses which are indicated by recent experiments like Super-Kamiokande.

Grand Unified Theories (GUTs) can solve several weaknesses of the SM. They unify the SM interactions and lead to relations between the quark and lepton mass matrices, thus reducing the arbitrariness in the fermionic sector. Furthermore, GUT models with an intermediate symmetry breaking scale are able to produce small neutrino masses by means of the see-saw mechanism. All GUTs include baryon and lepton number violating interactions which mediate proton and bound neutron decay.

In this work a mass model based on a $SO(10)$ GUT with a global $U(1)$ family symmetry is discussed which leads to an asymmetric Nearest Neighbour Interaction structure for the fermionic mass matrices. As a result of the analysis one gets three solutions of the model which include several large left- and right-handed fermion mixings. Those mixings are not observable in the SM where only the CKM quark mixing matrix can be measured, but they have testable effects on the branching ratios of nucleon decays in theories beyond the SM. One finds that decay channels with e^+ in the final state are suppressed while channels with μ^+ and ν^c are enhanced compared to models with small mixings. The total nucleon lifetimes obtained should be observable by future experiments. The $SO(10)$ model also predicts the masses and mixings of the light neutrinos. They are in the right range to explain the anomalies of solar and atmospheric neutrinos by means of oscillations, preferring the small angle MSW solution for the solar neutrino deficit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Das Standardmodell	11
1.1 Grundkonzepte des Standardmodells	11
1.2 Renormierung und laufende Kopplungen	13
1.3 Symmetriebrechung und Massenerzeugung	14
1.4 Grenzen des Standardmodells	18
2 Grand Unified-Theorien	21
2.1 Grundidee und allgemeine Eigenschaften	21
2.2 $SU(5)$	24
2.2.1 Konstruktion und Teilcheninhalt	24
2.2.2 Protonzerfall	25
2.2.3 Symmetriebrechung und Fermionmassen	27
2.2.4 Das Hierarchieproblem	27
2.2.5 Zusammenfassung	28
2.3 $SO(10)$	29
2.3.1 Spinordarstellungen der $SO(n)$ -Gruppen	29
2.3.2 Teilcheninhalt und Symmetriebrechung	30
2.3.3 Fermionmassen	33
2.3.4 See-Saw-Mechanismus	35
2.3.5 Zusammenfassung	37
2.4 E_6	38
2.5 Probleme und Grenzen von GUTs	39
3 Neutrino-Oszillationen	41
3.1 Theoretische Grundlagen	41
3.1.1 Vakuumoszillationen	41
3.1.2 Oszillationen in Materie	43
3.2 Experimentelle Situation	44
3.2.1 Sonnen-Neutrinos	44
3.2.2 Atmosphärische Neutrinos	46

3.2.3	LSND und KARMEN	48
3.2.4	Analyse für drei Neutrino-Arten	48
4	Das $SO(10)$-Massenmodell	51
4.1	Bestimmung der Symmetriebrechungsskalen	51
4.1.1	$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Modell	52
4.1.2	$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$ -Modell	54
4.2	Schwellenkorrekturen	55
4.3	Der Ansatz für die Massenmatrizen	57
4.4	Numerische Lösung des Massenmodells	63
4.5	Eigenschaften der leichten Neutrinos	71
4.6	Baryonasymmetrie durch Neutrinozerfälle	73
5	Zerfallsraten der Nukleonen	77
5.1	Die effektive Lagrangedichte	77
5.2	Hadronische Übergangsmatrixelemente	78
5.3	Berechnung der Zerfallsraten	81
5.4	Experimenteller Status	84
	Zusammenfassung und Ausblick	87
A	Gruppentheoretischer Anhang	91
A.1	Casimir-Operator und Dynkin-Index	91
A.2	Verzweigungsregeln für $SO(10)$ -Darstellungen	92
A.3	Verzweigungsregeln für $SU(4)$ -Darstellungen	92
A.4	Schwellenkorrektur-Koeffizienten	93
B	Renormierungsgruppengleichungen	95
B.1	Standardmodell	95
B.1.1	Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen	96
B.1.2	Renormierungsgruppengleichungen für die Yukawa-Matrizen	96
B.1.3	Renormierungsgruppengleichung für die Higgs-Selbstkopplung	97
B.1.4	Renormierungsgruppengleichung für die See-Saw-Massenmatrix	97
B.2	$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R [\otimes D]$ -Modell	97
C	Symmetriebrechungsskalen und Eichkopplungen	99
C.1	$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$ -Modell	99
C.2	$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Modell	99
D	Eigenschaften der untersuchten Lösungen	102
D.1	Massenmatrizen, Massen und Mischungswinkel bei M_I	102
D.2	$SO(10)$ -Higgs-Parameter bei M_I	105

D.3	Massenmatrizen, Massen und Mischungswinkel bei M_Z	105
D.4	CKM-Matrix und leptonische Mischungsmatrix bei M_Z	108
E	Berechnung der Nukleonzerfallsraten	109
E.1	A_i -Koeffizienten	109
E.2	Meson-Wellenfunktionen	111
E.3	Phasenraumfaktoren	112
E.4	Übergangsamplituden	112
E.5	Experimentelle Grenzen für die Nukleonzerfallsraten	114
E.6	Zerfallsraten der Nukleonen	114
	Literaturverzeichnis	118
	Schlußwort	125

Tabellenverzeichnis

1.1	Fermioninhalt des Standardmodells	12
1.2	Eichbosonen des Standardmodells	13
1.3	Werte für M_Z , M_W und $\sin^2 \theta_W(M_Z)$	16
1.4	Werte für $\alpha_3(M_Z)$ und $\alpha_{\text{em}}(M_Z)$	16
1.5	Werte für $\alpha_1(M_Z)$ und $\alpha_2(M_Z)$	16
1.6	Fermionmassen bei M_Z	17
2.1	Klassifikation und Eigenschaften einfacher Lie-Algebren	23
2.2	Intermediäre Symmetriegruppen in $SO(10)$ -GUTs	31
2.3	Higgs-Kopplungen und Vakuum erwartungswerte in $SO(10)$ -GUTs	34
3.1	Sonnen-Neutrino-Experimente und deren Resultate	44
3.2	Resultate von Kamiokande und Super-Kamiokande	46
3.3	Neutrino-Anomalien und erlaubte Δm^2 -Bereiche	50
4.1	Fermionmassen bei M_I	63
4.2	Werte von \tilde{y}_1/y_1 und $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ für die drei Beispiellösungen	68
4.3	Massen und Mischungswinkel der leichten Neutrinos bei M_Z	71
4.4	Werte von $y_1 M_R$ und daraus resultierende Neutrinomassen	72
5.1	Spinor-Amplituden der hadronischen Matrixelemente	81
5.2	Verhältnisse ausgewählter partieller Nukleonzerfallsraten	83
5.3	Aktuelle Resultate von Super-Kamiokande für die unteren Grenzen der Nukleonlebensdauern	84
A.1	Dynkin-Indizes und Eigenwerte des quadratischen Casimir-Operators ausgewählter irreduzibler Darstellungen	92
A.2	Koeffizienten für Schwellenkorrekturen durch Higgs-Teilchen bei M_U	93
A.3	Koeffizienten für Schwellenkorrekturen durch Higgs-Teilchen bei M_I	94
C.1	Verwendete Startwerte für M_Z und die Eichkopplungen bei $\mu = M_Z$	99
C.2	Werte für M_I und die Eichkopplungen bei $\mu = M_I$ im $G_{\text{PS}} \otimes D$ -Modell	99
C.3	M_U und $\alpha_U(M_U)$ im $G_{\text{PS}} \otimes D$ -Modell	100
C.4	Symmetriebrechungsskalen und Eichkopplungen im G_{PS} -Modell	101

D.1	Massenmatrixelemente, Massen und Mischungswinkel der geladenen Fermionen bei M_I	103
D.2	Dirac-, Majorana- und See-Saw-Massenmatrixelemente sowie Massen und Mischungswinkel der leichten Neutrinos bei M_I	104
D.3	$SO(10)$ -Higgs-Parameter bei M_I	105
D.4	Massenmatrixelemente, Massen und Mischungswinkel der geladenen Fermionen und der leichten Neutrinos bei M_Z	107
E.1	Wellenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen	111
E.2	Wellenfunktionen der Vektormesonen	112
E.3	Phasenraumfaktoren für Proton- und Neutronzerfälle	113
E.4	Übergangsamplituden für die Elementarprozesse der Nukleonenzerfälle	114
E.5	Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse der Nukleonen mit physikalischen Endzuständen	115
E.6	Experimentelle Grenzen für die Lebensdauern $1/\Gamma_i$ der Nukleonen	115
E.7	Partielle Zerfallsraten Γ_i/Γ des Protons	116
E.8	Totale Zerfallsraten und Lebensdauern des Protons	116
E.9	Partielle Zerfallsraten Γ_i/Γ des Neutrons	117
E.10	Totale Zerfallsraten und Lebensdauern des Neutrons	117

Abbildungsverzeichnis

2.1	Skalenabhängigkeit der inversen Eichkopplungen des Standardmodells . . .	22
2.2	Baryonzahlverletzende Vertizes der X - und Y -Bosonen	26
2.3	Beispiele für zum Protonzerfall beitragende Feynmandiagramme	26
2.4	Zum Hierarchieproblem beitragende Strahlungskorrektur	28
2.5	Baryonzahlverletzende Vertizes der X' - und Y' -Bosonen	32
3.1	Anomalie der Sonnen-Neutrinos und mögliche Lösungen	45
3.2	Anomalie der atmosphärischen Neutrinos und mögliche Lösungen	47
3.3	Resultate der Beschleunigerexperimente LSND und KARMEN	49
4.1	MSW-Lösung 1 (große Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum	68
4.2	MSW-Lösung 2a (kleine Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum	69
4.3	MSW-Lösung 2b (kleine Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum	69

Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist eine äußerst erfolgreiche Theorie. Es beschreibt auf konsistente Weise die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung, und seine Vorhersagen sind experimentell mit großer Genauigkeit bestätigt worden. Nach der Entdeckung des top-Quarks steht lediglich der Nachweis des Higgs-Bosons, dessen Existenz von der Theorie gefordert wird, noch aus.

Es gibt jedoch verschiedene Anhaltspunkte, die darauf hindeuten, daß das Standardmodell keine wirklich fundamentale Theorie darstellt, sondern vielmehr als effektive Niederenergie-Näherung einer solchen den heute experimentell zugänglichen Energiebereich beschreibt. So sind die Neutrinos im Rahmen des Standardmodells masselose Teilchen, während die Evidenz für nichtverschwindende Neutrinomassen durch Experimente wie Super-Kamiokande in den letzten Jahren deutlich zugenommen hat. Auch die beobachtete Baryonasymmetrie des Universums läßt sich nicht befriedigend erklären.

Eine weitere formale Schwäche des Standardmodells besteht in der großen Zahl freier Parameter, welche durch die Theorie nicht festgelegt sind, sondern an experimentelle Ergebnisse angepaßt werden müssen. Es gibt 18 solcher Parameter, von denen allein 13 im Fermionsektor liegen; dies sind die Fermionmassen und die Quarkmischungen. Abgesehen davon liefert das Standardmodell keine wirkliche Vereinheitlichung der drei Wechselwirkungen, da die zugehörigen Kopplungskonstanten völlig unabhängig voneinander sind.

Um diese Schwachpunkte zumindest teilweise beseitigen zu können, ist eine Reihe von Versuchen gemacht worden, das Standardmodell in eine umfassendere Theorie einzubetten. Viele von ihnen liefern jedoch kaum Vorhersagen, welche in naher Zukunft experimentell verifiziert werden können. Einen in dieser Hinsicht vielversprechenden Ansatz liefern die sogenannten Grand Unified-Theorien, deren Grundidee darin besteht, die drei Kräfte des Standardmodells in einer einzigen Wechselwirkung zu vereinheitlichen. Formal geschieht das durch die Konstruktion einer Eichtheorie mit einfacher Symmetriegruppe, welche die Standardmodell-Symmetriegruppe als Untergruppe enthält. Motivation hierfür ist in erster Linie die Tatsache, daß die skalenabhängigen Kopplungen des Standardmodells sich bei sehr großen Energien von $10^{14} - 10^{15}$ GeV näherungsweise in einem Punkt treffen. Mittels spontaner Symmetriebrechung erhält man aus der Grand Unified-Theorie als effektive Näherung bei niedrigen Energien wieder das Standardmodell.

Die wohl bemerkenswerteste Vorhersage von Grand Unified-Theorien besteht in der Instabilität des Protons und des gebundenen Neutrons aufgrund von baryon- und leptonzahlverletzenden Wechselwirkungen. Einerseits sind Zerfälle von Nukleonen bisher nicht beobachtet worden, andererseits ist die relevante Wechselwirkung in Grand Unified-Theorien wegen der großen Masse der zugehörigen Eichbosonen bei niedrigen Energien auch überaus schwach. Die einfachste der Grand Unified-Theorien, welche auf der Gruppe $SU(5)$ beruht, ist experimentell ausgeschlossen worden, da sie unter anderem zu kurze Lebensdauern für die Nukleonen liefert. Modelle auf der Grundlage der $SO(10)$ wie das hier untersuchte besitzen diesen Mangel nicht.

Da sich die laufenden Standardmodell-Kopplungen nicht exakt in einem Punkt treffen, ist eine direkte Vereinheitlichung der drei Wechselwirkungen nicht möglich; es muß eine zusätzliche intermediäre Symmetrie vorhanden sein. Die Skala, bei welcher diese Symmetrie in das Standardmodell gebrochen wird, liegt üblicherweise im Bereich $10^{10} - 10^{12}$ GeV und hat somit die richtige Größenordnung, damit über den See-Saw-Mechanismus sehr kleine, aber nichtverschwindende Neutrinomassen erzeugt werden können. Weitere Vorzüge von Grand Unified-Theorien sind Beziehungen zwischen den Massenmatrizen der Quarks und der Leptonen. Infolgedessen können durch Kenntnis der Massenmatrizen der geladenen Fermionen Vorhersagen für die Neutrinomassen und -mischungen gewonnen werden. Weiterhin kann im Rahmen von $SO(10)$ -Modellen mit intermediärer Massenskala und schweren Majorana-Neutrinos die Baryonasymmetrie des Universums erklärt werden.

Ein anderer Versuch, den Fermionsektor des Standardmodells besser zu verstehen, besteht in der Untersuchung von phänomenologisch motivierten Ansätzen für die Massenmatrizen der Fermionen. Diese Ansätze zeichnen sich durch Symmetrieanforderungen oder sogenannte Texturen, das heißt Nullen als Matrixeinträge an bestimmten Stellen, aus. Auf die zugrundeliegende Theorie jenseits des Standardmodells, welche den Ansatz realisiert, wird im allgemeinen nicht weiter eingegangen. Damit will man die Zahl der freien Parameter des Standardmodells reduzieren und Beziehungen zwischen Massen und Mischungen erhalten.

Schließlich kann man beide Zugänge kombinieren und Massenmodelle auf der Grundlage von Grand Unified-Theorien konstruieren. Das eröffnet die Möglichkeit, die Vorzüge dieser Theorien gegenüber dem Standardmodell auszunutzen und die Ansätze wegen der gegebenen Beziehungen zwischen den Fermionmassenmatrizen weniger willkürlich zu machen. Ferner haben in solchen Modellen alle Fermionmischungen Einfluß auf zumindest prinzipiell observable Größen wie Nukleonzerfallsraten, während im Standardmodell lediglich eine bestimmte Kombination der linkshändigen Quarkmischungen, die CKM-Matrix, beobachtbar ist. Daraus folgen überprüfbare Konsequenzen, an denen man den Erfolg des Ansatzes messen kann.

Gegenstand dieser Arbeit wird ein Massenmodell im Rahmen einer $SO(10)$ -Theorie sein. Es wird ein asymmetrischer „Nearest Neighbour Interaction“-Ansatz für die Massenmatrizen der Fermionen benutzt, welcher durch eine globale $U(1)$ -Familiensymmetrie realisiert wird. Dieser Ansatz führt auf voneinander unabhängige rechts- und linkshändige Mischungen

und bietet ausdrücklich die Möglichkeit, daß diese betragsmäßig groß sind. In vielen Massenmodellen werden große Mischungen im Bereich der geladenen Fermionen mit dem Hinweis auf die relativ kleinen CKM-Mischungen der Quarks außer Acht gelassen. In der Tat besitzen alle gefundenen Lösungen des untersuchten Modells mehrere große Mischungen, was zu Verzweigungsraten der Nukleonen führt, die sich von denen im Fall verschwindender Mischungen deutlich unterscheiden. Zusätzlich sind die erhaltenen Neutrinoeigenschaften, welche ebenfalls Modellvorhersagen darstellen, in der Lage, die Anomalien der Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos durch Oszillationslösungen zu erklären.

In den letzten Jahren hat sich die Forschungstätigkeit hauptsächlich auf supersymmetrische Grand Unified-Theorien, welche spontan in das minimale supersymmetrische Standardmodell gebrochen werden, beschränkt. Wird die Supersymmetrie, eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, bei vergleichsweise niedrigen Energien von $\lesssim 1$ TeV effektiv gebrochen, so treffen sich die Kopplungskonstanten des supersymmetrischen Standardmodells bei etwa 10^{16} GeV genau in einem Punkt. Da die Massen der Superpartner dann nicht sehr viel größer als die der gewöhnlichen Teilchen sind, bietet sich die Möglichkeit, das Divergenzverhalten der Theorie zu verbessern und das Hierarchieproblem zu lösen. Allerdings läßt die Abwesenheit von experimentellen Hinweisen auf eine bei kleinen Energien gebrochene Supersymmetrie in der Natur ein solches Szenario zunehmend unwahrscheinlicher erscheinen. Auch eine für die Erzeugung von Neutrinomassen über den See-Saw-Mechanismus erforderliche intermediäre Massenskala läßt sich in supersymmetrischen Grand Unified-Theorien nicht auf natürliche Weise realisieren. Desweiteren sind supersymmetrische Modelle in ihrer Vorhersagekraft durch den Einfluß zahlreicher unbekannter Größen, wie zum Beispiel die Massen der Superpartner, stark eingeschränkt. Deshalb wird hier der Standpunkt vertreten, daß Modelle ohne Supersymmetrie weiter untersucht werden sollten. Dies schließt eine Brechung der Supersymmetrie bei sehr hohen Energien keineswegs aus.

Im ersten Kapitel wird zunächst ein Überblick über die Grundkonzepte und wichtigsten Eigenschaften des Standardmodells gegeben, auch dessen Grenzen werden genauer betrachtet. Kapitel 2 behandelt den Themenkomplex der Grand Unified-Theorien. Nach einer Schilderung der grundlegenden Ideen und der allgemeinen Vorgehensweise bei der Konstruktion solcher Modelle werden die $SU(5)$ als Prototyp der Grand Unified-Theorien und die $SO(10)$ als das dieser Arbeit zugrundeliegende Beispiel ausführlich diskutiert; desweiteren wird auf Vor- und Nachteile der Modelle eingegangen. Gegenstand des dritten Kapitels sind die theoretischen Grundlagen und der experimentelle Status von Neutrino-Oszillationen. Die drei bis heute beobachteten Neutrino-Anomalien und ihre möglichen Oszillationslösungen durch massive Neutrinos werden vorgestellt. Kapitel 4 beginnt mit vorbereitenden Arbeiten wie der Bestimmung der Symmetriebrechungsskalen und Kopplungen. Mittelpunkt des Kapitels ist der Ansatz für das betrachtete $SO(10)$ -Massenmodell und dessen numerische Lösung. Als ein wichtiges Resultat erhält man daraus Voraussagen über die Eigenschaften im Neutrino-sektor der Theorie, welche sich als phänomenologisch sinnvoll erweisen. In Kapitel 5 schließlich werden für die analysierten Lösungen die partiellen und totalen Zerfallsraten

der Nukleonen berechnet. Diese stellen eine wesentliche und in absehbarer Zeit experimentell überprüfbare Vorhersage des untersuchten Modells dar.

Ziel und Motivation dieser Untersuchung lassen sich abschließend mit den einleitenden Worten aus [1] sehr treffend zusammenfassen:

„The Standard Model is unlikely to be a fundamental theory; it contains 18 arbitrary parameters, 13 of which are the fermion masses and mixing angles. In a fundamental theory, these should be calculable from a few inputs just as the hydrogen spectral lines follow from Quantum Mechanics. We are very far from such a theory of fermion masses. We would be fortunate to have an analogue of Balmer’s formula since it might lead us to the fundamental theory. The framework described here is, at best, an attempt to obtain such a formula.“

Kapitel 1

Das Standardmodell

1.1 Grundkonzepte des Standardmodells

Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchenphysik [2] ist eine renormierbare Eichtheorie, welche die Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD), und das Glashow-Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung zusammenfaßt. Es basiert auf der Invarianz unter lokalen $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichtransformationen; die Symmetriegruppe G_{SM} ist ein direktes Produkt aus drei Faktoren.

Die QCD [3] beruht auf der Eichgruppe $SU(3)_C$ und beschreibt die Wechselwirkung von Teilchen mit Farbladung, den Quarks und Gluonen. Die Quarks sind die fermionischen Grundbausteine der stark wechselwirkenden Materie und treten in drei verschiedenen Farbzuständen auf. Unter $SU(3)_C$ -Transformationen verhalten sie sich wie die Fundamentaldarstellung **3**. In der Natur werden allerdings nur farbneutrale Kombinationen von drei Quarks (Baryonen) bzw. Quark und Antiquark (Mesonen) beobachtet; dieses Phänomen wird als Confinement bezeichnet. Die Gluonen sind die mit den acht Generatoren der $SU(3)_C$ verbundenen Vektorbosonen und transformieren sich gemäß der adjungierten Darstellung. Durch den Austausch von Gluonen wird die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks vermittelt.

Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung [4] besitzt eine $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichsymmetrie, die durch den Higgs-Mechanismus spontan in die $U(1)_{\text{em}}$ der Quantenelektrodynamik (QED) gebrochen ist. Eine Grundeigenschaft dieses Modells ist die Paritätsverletzung, da das Transformationsverhalten der Fermionen von deren Chiralität abhängt. Man zerlegt die durch Dirac-Spinoren Ψ dargestellten Fermionfelder gemäß

$$\Psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\Psi, \quad \Psi = \Psi_L + \Psi_R \quad (1.1)$$

in ihre links- und rechtshändigen Komponenten, sogenannte Weyl-Spinoren. Die linkshändigen Quarks und Leptonen sind in $SU(2)_L$ -Doublets angeordnet, während die rechtshändigen Fermionen Singulets bilden und an der schwachen Wechselwirkung nicht teilnehmen. Die elektrische Ladung der Teilchen ergibt sich aus ihrer Hyperladung Y und der Komponente T_3 des schwachen Isospins ($T_a = \sigma_a/2$ mit $a = 1, 2, 3$ sind die Generatoren der $SU(2)_L$ -

Lie-Algebra) aus der Beziehung

$$Q = T_3 + Y \quad (1.2)$$

In Erweiterungen des SM erweist es sich aus gruppentheoretischen Gründen als sinnvoll, statt der rechtshändigen Teilchen die linkhändigen Komponenten der Antiteilchen zu betrachten. Die Antiteilchen erhält man durch die Anwendung der Ladungskonjugation \mathcal{C}

$$\mathcal{C} \Psi \mathcal{C}^{-1} \equiv \Psi^C = C \bar{\Psi}^T \quad \text{mit} \quad C = i \gamma_2 \gamma_0, \quad \Psi_{L,R}^C \equiv (\Psi_{R,L})^C \quad (1.3)$$

Weiterhin gelten die Identitäten

$$\Psi_{R,L} = C (\bar{\Psi}_{L,R}^C)^T \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}_{R,L} = (\Psi_{L,R}^C)^T C \quad (1.4)$$

Die Fermionen treten im SM in drei Familien mit jeweils gleichen Quantenzahlen auf. Jede dieser Familien transformiert sich nach der Darstellung

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \quad (1.5)$$

der SM-Symmetriegruppe G_{SM} . Der erste Eintrag bezeichnet hierbei die $SU(3)_C$ -Darstellung, der zweite die $SU(2)_L$ -Darstellung und der Index die $U(1)_Y$ -Hyperladungsquantenzahl (die komplex konjugierte Darstellung wird durch einen Querstrich gekennzeichnet). In Tabelle 1.1 ist der fermionische Teilcheninhalt des SM aufgeführt.

Quarks	G_{SM}	Q	Leptonen	G_{SM}	Q
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	0 -1
u_L^C, c_L^C, t_L^C	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$			
d_L^C, s_L^C, b_L^C	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}}$	$+\frac{1}{3}$	e_L^+, μ_L^+, τ_L^+	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$	+1

Tabelle 1.1: Fermioninhalt des Standardmodells

Es ist zu beachten, daß im Fermionspektrum des SM keine rechtshändigen Neutrinos vorkommen, da diese sich aufgrund ihrer Farb- und Ladungsneutralität nach der G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ transformieren würden, also an keiner SM-Wechselwirkung teilnehmen. Dies steht im Einklang mit der Tatsache, daß rechtshändige Neutrinos und linkshändige Antineutrinos in Experimenten nicht beobachtet werden.

Die Eichbosonen, die als Austauscheteilchen die Wechselwirkung vermitteln, transformieren sich stets wie die adjungierte Darstellung der Symmetriegruppe, im Falle des SM also gemäß $(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$. Die Kopplungsstärken der SM-Eichbosonen an die fermionischen Ströme $j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ werden mit g_3 , g_2 und g' bezeichnet. Ferner besitzen Eichbosonen in Modellen mit nichtabelscher Symmetriegruppe auch eine Selbstwechselwirkung. In Erweiterungen des SM durch Grand Unified-Theorien (GUTs) wird statt g' im allgemeinen mit $g_1 = \sqrt{5/3} g'$ gearbeitet, da g_1 die korrekte Normierung besitzt. Die Eigenschaften der SM-Eichbosonen sind in Tabelle 1.2 zusammengefaßt.

Bezeichnung	G_{SM}	Spin	Kopplung
Gluonen g $[SU(3)_C]$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$	1	g_3
W -Bosonen $[SU(2)_L]$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$	1	g_2
B -Boson $[U(1)_Y]$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$	1	$g' = \sqrt{3/5} g_1$

Tabelle 1.2: Eichbosonen des Standardmodells

1.2 Renormierung und laufende Kopplungen

Ein wichtiges Kriterium für die formale Konsistenz einer Eichtheorie ist ihre Renormierbarkeit. Dies bedeutet, daß bei der Berechnung von physikalischen Prozessen in höheren Ordnungen der Störungstheorie nur endlich viele qualitativ verschiedene Divergenzen auftreten. Diese können dann durch eine Redefinition der Modellparameter wie Kopplungen und Massen absorbiert werden [5].

Die Unendlichkeiten treten in Form von divergenten Impulsintegralen auf. Durch Anwendung eines Regularisierungsverfahrens werden die Integrale durch Ausdrücke ersetzt, die von einem neuen Parameter, dem Regularisierungsparameter, abhängen, und für einen bestimmten Wert desselben wieder die ursprüngliche Gestalt annehmen. Bei der dimensional Regularisierung zum Beispiel werden die Integrale statt in vier in $D = 4 - 2\varepsilon$ Impulsraumdimensionen gelöst; die Divergenzen gehen dann in Terme $\sim 1/\varepsilon$ über. Im anschließenden Renormierungsprozeß werden die divergenten Parameter \mathcal{G}_0 in der Lagrangedichte durch Einführung von Renormierungskonstanten Z , welche die $1/\varepsilon$ -Terme aufnehmen, in die endlichen renormierten Größen \mathcal{G}_R umgewandelt: $\mathcal{G}_0 \equiv Z \mathcal{G}_R$.

Im Rahmen der Regularisierung wird aus formalen Gründen zwangsläufig eine freie Massenskala μ in die Theorie eingeführt. Sowohl die Renormierungskonstanten als auch die renormierten Größen hängen von dieser Skala ab; man spricht von laufenden Größen. Die funktionalen Zusammenhänge, welche die Skalenabhängigkeit der renormierten Größen beschreiben, werden als Renormierungsgruppengleichungen bezeichnet [6]. Sie sind immer dann von Bedeutung, wenn physikalische Größen bei verschiedenen Massen- bzw. Energieskalen miteinander verglichen werden. Die in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsgruppengleichungen sind in Anhang B angegeben. Die Energieabhängigkeit observabler Größen ist experimentell bestätigt; so hat die Kopplungsstärke $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$ der QED bei $\mu \approx 0$ den Betrag $1/137$, bei $\mu \approx M_Z$ ist sie etwa $1/129$ groß [7].

Die Renormierbarkeit einer Eichtheorie kann durch das Auftreten von Anomalien zerstört werden. Anomalien sind Symmetrien der klassischen Lagrangedichte, die durch den Prozeß der Quantisierung gebrochen werden [8]. In Modellen mit chiralen Fermionen äußert sich dies durch das Auftreten von linear divergenten Strahlungskorrekturen in Form von fermionischen Dreiecksdiagrammen mit einer ungeraden Anzahl axialer Vertizes $\gamma_\mu \gamma_5$. Die Divergenzen verletzen die Slavnov-Taylor-Identitäten, deren Gültigkeit für die vollständige Renormierung der Theorie in allen Ordnungen der Störungsrechnung benötigt

wird. Diese Beiträge sind im wesentlichen proportional zu

$$A_{abc} = A_{abc}^L - A_{abc}^R = \text{Tr}(\{T_a, T_b\} T_c)_L - \text{Tr}(\{T_a, T_b\} T_c)_R, \quad (1.6)$$

wobei die T_i die Generatoren der zur Symmetriegruppe gehörenden Lie-Algebra sind, und zwar in der Darstellung, nach der sich die links- beziehungsweise rechtshändigen Fermionen transformieren [9, 10]. Die Renormierbarkeit ist demnach sichergestellt, wenn

$$A_{abc}^{L,R} = \text{Tr}(\{T_a, T_b\} T_c)_{L,R} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.7)$$

gilt. Im Rahmen des SM führt (1.7) auf die vier Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\{T_a, T_b\} T_c) &= 0, & \text{Tr}(T_a Y^2) &= 0, \\ \text{Tr}(\{T_a, T_b\} Y) &= 0, & \text{Tr}(Y^3) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die beiden oberen Gleichungen sind aufgrund der Spurfreiheit der $SU(2)_L$ -Generatoren automatisch erfüllt, die unteren beiden wegen der SM-Zuordnung der Hyperladungen in (1.5). Das SM ist also deshalb anomaliefrei, weil sich die Beiträge der Quarks und der Leptonen gerade aufheben.

1.3 Symmetriebrechung und Massenerzeugung

In Eichtheorien können prinzipiell zwei Arten von Massentermen vorkommen. Wenn Ψ ein Dirac-Spinor ist und $\Psi_{L,R}$ seine links- und rechtshändigen Komponenten bezeichnet, so hat der Dirac-Massenterm die Gestalt (h.c. steht für hermitesch konjugiert)

$$m \bar{\Psi} \Psi = m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) = m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \text{h.c.}) \quad (1.9)$$

Das ist derselbe Massenterm, der auch in der Dirac-Gleichung vorkommt. Unter Verwendung von (1.4) kann man $\bar{\Psi}_R \Psi_L$ auch als $(\Psi_L^C)^T C \Psi_L$ schreiben.

Desweiteren existieren die lorentzinvarianten Größen

$$\frac{M_R}{2} (\bar{\Psi}_L^C \Psi_R + \text{h.c.}) = \frac{M_R}{2} (\bar{\Psi}_L^C C (\bar{\Psi}_L^C)^T + \text{h.c.}) \quad \text{und} \quad (1.10)$$

$$\frac{M_L}{2} (\bar{\Psi}_L \Psi_R^C + \text{h.c.}) = \frac{M_L}{2} (\bar{\Psi}_L C (\bar{\Psi}_L)^T + \text{h.c.}), \quad (1.11)$$

die man als Majorana-Massenterme bezeichnet, da sie nur für Majorana-Teilchen definiert sind. Letztere werden durch Spinoren Ψ beschrieben, für welche $\Psi^C \equiv \Psi$ gilt, das heißt Teilchen und Antiteilchen sind identisch. Deswegen sind Majorana-Teilchen zwangsläufig elektrisch neutral. Majorana-Massenterme werden später im Zusammenhang mit Neutrinomassen von Bedeutung sein.

Das Transformationsverhalten von Massentermen für die geladenen Fermionen im SM sieht folgendermaßen aus:

$$(u, c, t)\text{-Quarks:} \quad (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \otimes (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

$$(d, s, b)\text{-Quarks:} \quad (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \otimes (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

$$\text{geladene Leptonen:} \quad (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

Die Lagrangedichte des SM kann demnach keine Fermionmassenterme enthalten, da diese nicht invariant unter G_{SM} -Transformationen sind. Das steht aber im Widerspruch zu der experimentellen Beobachtung massiver Teilchen.

Abgesehen davon wird in der Natur keineswegs die Symmetrie des SM, sondern eine $SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ -Symmetrie beobachtet.

Beide Probleme können durch die spontane Brechung lokaler Eichsymmetrien, den sogenannten Higgs-Mechanismus, gelöst werden [11]. Dazu werden dem Teilchenspektrum der Eichtheorie Spin-0-Teilchen hinzugefügt. Im SM wird ein Doublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

dieser Higgs-Bosonen eingeführt, wobei ϕ^+ und ϕ^0 komplexe Skalarfelder sind; sie liegen in der G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$. Das Potential für Φ hat die Form

$$V(\Phi) = m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.16)$$

und erzeugt für $m^2 < 0$ einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \quad (1.17)$$

von Φ . Den Wert von v kann man in niedrigster Ordnung aus der meßbaren Fermi-Konstanten G_F und der Beziehung $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2}$ bestimmen; er beträgt $v = 246.22$ GeV. Nun ist der Vakuumzustand nicht mehr $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -symmetrisch; die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung wird spontan in die $U(1)_{\text{em}}$ der QED gebrochen:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (1.18)$$

Durch ihre Wechselwirkung mit den Higgs-Teilchen erhalten die Eichbosonen Massenterme. Aus den vier $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Bosonen entstehen so die physikalischen Eichbosonen, das heißt die Masseneigenzustände

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1 \pm i W_2) \quad (1.19)$$

$$Z = \sin \theta_W B + \cos \theta_W W_3 \quad (1.20)$$

$$A = \cos \theta_W B - \sin \theta_W W_3 \quad (1.21)$$

θ_W ist der Weinberg-Winkel; für ihn gilt

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g_2^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g_2} \quad (1.22)$$

A ist das Eichboson der $U(1)_{\text{em}}$, das masselose Photon. Seine Kopplungskonstante, die Elementarladung e , ergibt sich aus $e = g_2 \sin \theta_W$. Die W - und Z -Bosonen erhalten die Massen

$$M_W = \frac{g_2 v}{2}, \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \quad (1.23)$$

während die Gluonen masselos bleiben, da die Higgs-Teilchen farbneutral sind. Tabelle 1.3 enthält die Werte für die Massen und den Weinberg-Winkel:

Größe	M_Z	M_W	$\sin^2 \theta_W(M_Z)$
Wert	$91.187 \pm 0.007 \text{ GeV}$	$80.41 \pm 0.10 \text{ GeV}$	0.23124 ± 0.00024

Tabelle 1.3: Werte für M_Z , M_W und $\sin^2 \theta_W(M_Z)$ [7]

Die experimentell meßbaren Eichkopplungen der $SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ -Theorie haben bei der Skala $\mu = M_Z$ folgende Werte ($\alpha_3 = g_3^2/4\pi$ und $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$):

Größe	$\alpha_3(M_Z)$	$\alpha_{\text{em}}(M_Z)$
Wert	0.119 ± 0.002	$(128.88 \pm 0.09)^{-1}$

Tabelle 1.4: Werte für $\alpha_3(M_Z)$ und $\alpha_{\text{em}}(M_Z)$ [7]

Daraus kann man mit Hilfe der Beziehungen

$$\alpha_1(M_Z) = \frac{5 \alpha_{\text{em}}(M_Z)}{3 \cos^2 \theta_W(M_Z)}, \quad \alpha_2(M_Z) = \frac{\alpha_{\text{em}}(M_Z)}{\sin^2 \theta_W(M_Z)}, \quad (1.24)$$

die Werte der SM-Größen $\alpha_{1,2}(M_Z)$ berechnen:

Größe	$\alpha_1(M_Z)$	$\alpha_2(M_Z)$
Wert	$(59.447 \pm 0.060)^{-1}$	$(29.802 \pm 0.052)^{-1}$

Tabelle 1.5: Werte für $\alpha_1(M_Z)$ und $\alpha_2(M_Z)$ [7]

Von den vier reellen Freiheitsgraden in Φ ist nur einer physikalisch, er gehört zum elektrisch neutralen Higgs-Boson H . Es ist das einzige SM-Teilchen, das experimentell noch nicht nachgewiesen wurde. Für seine Masse $m_H = \sqrt{\lambda} v$ gibt es lediglich eine Untergrenze: $m_H > 89.7 \text{ GeV}$ [12].

Die Fermionmassen werden durch Einführung von Yukawa-Kopplungen zwischen den Fermionen und den Higgs-Teilchen realisiert. Diese Yukawa-Terme können wegen (1.12)-(1.14) und $\Phi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$ eichinvariant konstruiert werden und haben die Form

$$\mathcal{L}_M = \sum_{a,b=1}^3 \left(\bar{Q}_L^a \tilde{\Phi} (\mathbf{Y}_u)_{ab} u_R^b + \bar{Q}_L^a \Phi (\mathbf{Y}_d)_{ab} d_R^b + \bar{L}_L^a \Phi (\mathbf{Y}_e)_{ab} e_R^b \right) + \text{h.c.} \quad (1.25)$$

mit

$$Q_L^a = \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix}, \quad L_L^a = \begin{pmatrix} \nu_L^a \\ e_L^a \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

Die Indizes a und b bezeichnen die Fermionfamilien ($d_L^a \equiv s_L$ für $a = 2$), die Elemente der (3×3) -Matrizen \mathbf{Y}_i sind die Yukawa-Kopplungen. Die Fermionmassen entstehen im Rahmen der spontanen Symmetriebrechung, wenn Φ seinen Vakuumerwartungswert v ausbildet. Dann sind die Massenmatrizen durch

$$\mathbf{M}_u = \frac{1}{\sqrt{2}} v \mathbf{Y}_u, \quad \mathbf{M}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} v \mathbf{Y}_d, \quad \mathbf{M}_e = \frac{1}{\sqrt{2}} v \mathbf{Y}_e \quad (1.27)$$

gegeben; (1.25) geht über in

$$\mathcal{L}_M = \sum_{a,b=1}^3 \left((\mathbf{M}_u)_{ab} \bar{u}_L^a u_R^b + (\mathbf{M}_d)_{ab} \bar{d}_L^a d_R^b + (\mathbf{M}_e)_{ab} \bar{e}_L^a e_R^b \right) + \text{h.c.} \quad (1.28)$$

Da die Massenmatrizen beliebige komplexe (3×3) -Matrizen sein können, sind die Fermionen in Tabelle 1.1, die Eigenzustände der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Wechselwirkung, im allgemeinen nicht mehr mit den physikalischen Teilchen definierter Masse identisch. Letztere erhält man, wenn man die Massenmatrizen durch biunitäre Transformationen diagonalisiert:

$$\mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{M}_u \mathbf{U}_R = \mathbf{M}_u^{(D)}, \quad \mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{M}_d \mathbf{D}_R = \mathbf{M}_d^{(D)}, \quad \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{E}_R = \mathbf{M}_e^{(D)} \quad (1.29)$$

Die nichtverschwindenden Elemente der Diagonalmatrizen $\mathbf{M}_i^{(D)}$ sind die Fermionmassen; ihre Werte sind in Tabelle 1.6 aufgelistet.

Größe:	$m_u(M_Z)$	$m_d(M_Z)$	$m_s(M_Z)$
Wert:	$2.33^{+0.42}_{-0.45} \text{ MeV}$	$4.69^{+0.60}_{-0.66} \text{ MeV}$	$93.4^{+11.8}_{-13.0} \text{ MeV}$
Größe:	$m_c(M_Z)$	$m_b(M_Z)$	$m_t(M_Z)$
Wert:	$677^{+56}_{-61} \text{ MeV}$	$3.00 \pm 0.11 \text{ GeV}$	$181 \pm 13 \text{ GeV}$
Größe:	$m_e(M_Z)$	$m_\mu(M_Z)$	$m_\tau(M_Z)$
Wert:	$486.84727 \pm 0.00014 \text{ keV}$	$102.75138 \pm 0.00033 \text{ MeV}$	$1746.7 \pm 0.3 \text{ MeV}$

Tabelle 1.6: Fermionmassen bei M_Z [13]

Die Yukawa-Kopplungen sind ebenso wie die Eichkopplungen renormierte Größen und hängen somit von der Massenskala μ ab. Über (1.27) und (1.29) sind demnach auch die Fermionmassen und -mischungen skalenabhängig.

Die Transformationen (1.29) liefern den Zusammenhang zwischen den Eigenzuständen der SM-Wechselwirkungen, hier mit dem Index (0) bezeichnet, und den Masseneigenzuständen:

$$u_{L,R}^{a(0)} = \mathbf{U}_{L,R} u_{L,R}^a, \quad d_{L,R}^{a(0)} = \mathbf{D}_{L,R} d_{L,R}^a, \quad e_{L,R}^{a(0)} = \mathbf{E}_{L,R} e_{L,R}^a \quad (1.30)$$

Nun ist (1.30) auch in den übrigen Termen der Langrangedichte auszuführen, in denen Fermionfelder vorkommen. Während die neutralen Ströme, die an das Z -Boson und das Photon koppeln, invariant unter (1.30) sind, ändern sich die geladenen schwachen Ströme:

$$\bar{u}_L^{a(0)} \gamma^\mu d_L^{a(0)} W_\mu^+ \implies \bar{u}_L^a \gamma^\mu (\mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L)_{ab} d_L^b W_\mu^+ \quad (1.31)$$

$$\bar{d}_L^{a(0)} \gamma^\mu u_L^{a(0)} W_\mu^- \implies (\mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{U}_L)_{ab} \bar{d}_L^b \gamma^\mu u_L^a W_\mu^- \quad (1.32)$$

Im Experiment tritt nur die (unitäre) Kombination $\mathbf{V} \equiv \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L$ der Mischungsmatrizen in Erscheinung; man nennt sie Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) [14]. Alle anderen Mischungen, insbesondere die rechtshändigen, sind im SM nicht observabel. Die experimentellen Grenzen für die Beträge der Elemente von \mathbf{V} liegen bei [7]:

$$|\mathbf{V}| = \begin{pmatrix} 0.9745 - 0.9760 & 0.217 & -0.224 & 0.0018 - 0.0045 \\ 0.217 & -0.224 & 0.9737 - 0.9753 & 0.036 - 0.042 \\ 0.004 & -0.013 & 0.035 & -0.042 \\ 0.9991 - 0.9994 & & & \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Die in dieser Arbeit verwendete Parametrisierung für \mathbf{V} lautet:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} C_{12}C_{31} & S_{12}C_{31} & S_{31}e^{-i\delta} \\ -S_{12}C_{23} - C_{12}S_{23}S_{31}e^{i\delta} & C_{12}C_{23} - S_{12}S_{23}S_{31}e^{i\delta} & S_{23}C_{31} \\ S_{12}S_{23} - C_{12}C_{23}S_{31}e^{i\delta} & -C_{12}S_{23} - S_{12}C_{23}S_{31}e^{i\delta} & C_{23}C_{31} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

mit $C_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und $S_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Als numerische Werte für die Winkel werden $\theta_{12} = 0.223$, $\theta_{23} = 0.039$ und $\theta_{31} = 0.003$ benutzt. Ferner wird $\delta = 0$ gewählt, da ein Modell mit reellen Massenmatrizen (und somit orthogonalen Mischungsmatrizen) Gegenstand der Untersuchung ist; auf das Problem der CP -Verletzung soll hier nicht näher eingegangen werden. Die Parametrisierung (1.34) mit $\delta = 0$ wird auch für alle Mischungsmatrizen in (1.29) benutzt.

Die leptonischen Anteile der geladenen schwachen Ströme ändern sich im Falle masseloser Neutrinos nicht, da die linkshändigen Neutrinos derselben Transformation \mathbf{E}_L wie die geladenen Leptonen unterzogen werden können.

1.4 Grenzen des Standardmodells

Das SM ist nicht nur mathematisch konsistent, sondern auch phänomenologisch überaus erfolgreich. Viele seiner Vorhersagen sind auf eindrucksvolle Weise experimentell bestätigt worden, zum Beispiel die Existenz der dritten Fermionengeneration, der massiven W^\pm - und Z -Bosonen und des neutralen schwachen Stroms. Lediglich die beobachtete Baryonasymmetrie des Universums [15] und die durch die Neutrinoexperimente der letzten Jahre implizierte Existenz massiver Neutrinos [16] lassen sich im Rahmen des SM nicht befriedigend erklären. Davon abgesehen ist die Übereinstimmung der theoretischen Vorhersagen des SM mit den experimentellen Ergebnissen sehr gut [17].

Es gibt allerdings auch eine Reihe von ungeklärten theoretischen Fragestellungen, die stark darauf hindeuten, daß das SM keine wirklich fundamentale Theorie ist, sondern lediglich die effektive Näherung einer solchen für niedrige Energien.

Zunächst ist die Zahl der freien Parameter im SM, deren Werte von der Theorie nicht vorhergesagt werden, sondern an experimentelle Resultate angepaßt werden müssen, sehr groß:

- neun Massen der geladenen Fermionen

- drei Winkel und eine Phase in der CKM-Matrix
- drei Eichkopplungen
- die Higgs-Masse und -kopplungskonstante
- zwei θ -Parameter in den CP -verletzenden Lagrangedichte-Termen $\sim \theta \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$

Unter Berücksichtigung massiver Neutrinos kommen drei Neutrinomassen sowie drei Winkel und drei Phasen in der leptonischen Mischungsmatrix hinzu. Eine grundlegende Theorie sollte dagegen mit möglichst wenigen freien Parametern auskommen.

Weitere Aspekte, die auf eine Theorie jenseits des SM schließen lassen, sind:

- Die Symmetriegruppe G_{SM} ist ein direktes Produkt, woraus die Existenz dreier voneinander unabhängiger und betragsmäßig stark unterschiedlicher Kopplungskonstanten folgt; eine Vereinheitlichung der Wechselwirkungen erfolgt nicht. Ebenfalls damit verbunden ist die komplizierte Darstellung (1.5), in der die Fermionen einer Familie liegen.
- Die Zuordnung der Hyperladungen zu den Fermionen ist weitgehend willkürlich und lediglich durch (1.2) und (1.8) eingeschränkt. Dies liefert aber keine Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung in Einheiten von $e/3$.
- Die bis heute beobachteten Fermionen liegen in drei Familien, die hinsichtlich ihrer Quantenzahlen und ihrer Wechselwirkungen völlig identisch sind, sich aber bezüglich ihrer Massen beträchtlich unterscheiden.
- Der Hauptgrund für die Einordnung der linkshändigen Fermionen in $SU(2)_L$ -Doublets und der rechtshändigen in Singulets liegt im phänomenologischen Erfolg dieses Ansatzes.
- Neutrinomassen können im Rahmen des SM zwar durch Einführung von nichtwechselwirkenden rechtshändigen Neutrinos konstruiert werden, aber es stellt sich dann die Frage, warum ihre Massen sehr viel kleiner als die der geladenen Fermionen sein sollten.
- Der Higgs-Sektor des SM ist, sowohl was die Anzahl der Higgs-Teilchen als auch die Einordnung in Darstellungen von G_{SM} angeht, weitgehend willkürlich. Auch die Selbstkopplung sowie die Yukawa-Kopplungen und Massen der Higgs-Teilchen sind nicht festgelegt.
- Der QCD- θ -Parameter ist extrem klein, $\theta \lesssim 10^{-9}$. Dies folgt direkt aus den experimentellen Grenzen für das Dipolmoment des Neutrons.
- Die durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie beschriebene Gravitation läßt sich im Gegensatz zu den restlichen Wechselwirkungen nicht allein mit dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz erklären. Alle bisher entwickelten Eichtheorien der Gravitation haben sich als nichtrenormierbar erwiesen.

Zahlreiche Modifikationen des minimalen SM sind konstruiert worden, um einzelne dieser Schwächen zu beheben. So kann das Problem der CP -Verletzung in der QCD durch ein Modell mit zwei Higgs-Doublets und einer zusätzlichen chiralen $U(1)$ -Symmetrie gelöst werden [18], während Modelle mit sogenannten horizontalen Symmetrien versuchen, die Massenhierarchie zwischen den Fermionfamilien zu erklären [19].

Im Gegensatz dazu gehen die Grand Unified-Theorien (GUTs), die im nächsten Kapitel diskutiert werden, über eine bloße Erweiterung des SM hinaus. Es wird vielmehr der Versuch gemacht, das SM in eine umfassendere Theorie einzubetten. GUTs können einige, wenn auch nicht alle, der oben erwähnten Schwächen beseitigen und zum besseren Verständnis des SM beitragen.

Kapitel 2

Grand Unified-Theorien

2.1 Grundidee und allgemeine Eigenschaften

Das Hauptziel bei der Konstruktion von Grand Unified-Theorien (GUTs) [20, 21] besteht darin, die drei qualitativ und quantitativ verschiedenen Wechselwirkungen des SM in einer einzigen zu vereinheitlichen. Formal geschieht dies durch die Einbettung der SM-Symmetriegruppe G_{SM} in eine einfache Lie-Gruppe $G \supset G_{\text{SM}}$. Diese neue Theorie soll das SM als effektive Niederenergienäherung enthalten, was durch spontane Symmetriebrechung in einem oder auch mehreren Schritten erreicht werden kann.

Motiviert wird dieser Ansatz in erster Linie durch die Skalenabhängigkeit der Eichkopplungen im SM [22]. Integriert man die Renormierungsgruppengleichungen (B.7-B.9) für die drei Größen $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ [23] von der Skala M_Z zu höheren Energien, erhält man das in Abbildung 2.1 gezeigte Verhalten. Die laufenden Kopplungen treffen sich näherungsweise im Bereich $\mu \approx 10^{14}$ - 10^{15} GeV und $\alpha_i \approx 1/40$. Daß sie sich jedoch nachweislich nicht in einem Punkt kreuzen, ist erst seit der Inbetriebnahme des Teilchenbeschleunigers LEP am CERN 1989 und der damit verbundenen Steigerung der Meßwertgenauigkeit für $\alpha_i(M_Z)$ bekannt [24].

Der erste Schritt bei der Konstruktion eines GUT-Modells besteht in der Wahl einer kompakten und einfachen Lie-Gruppe G . Man kann prinzipiell auch halbeinfache Lie-Gruppen, also direkte Produkte von einfachen Gruppen, verwenden, erhält dann aber für jeden Faktor eine separate Kopplungskonstante. Damit diese Kopplungen gleich sind und eine Vereinheitlichung zustande kommt, müssen zusätzliche Symmetrien eingeführt werden. Deshalb sind einfache Gruppen vorzuziehen, da man auf diese Weise eine Wechselwirkung mit genau einer Kopplung erhält; die SM-Wechselwirkungen sind dann verschiedene Aspekte dieser Kraft.

Die einfachen Lie-Gruppen beziehungsweise -algebren sind vollständig klassifiziert und ihre Eigenschaften und die ihrer Darstellungen bekannt [25, 26]; Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht. Es gibt neben den vier unendlichen Reihen der klassischen Lie-Gruppen die fünf exzeptionellen Gruppen. Der Rang ist gleich der maximalen Anzahl miteinander

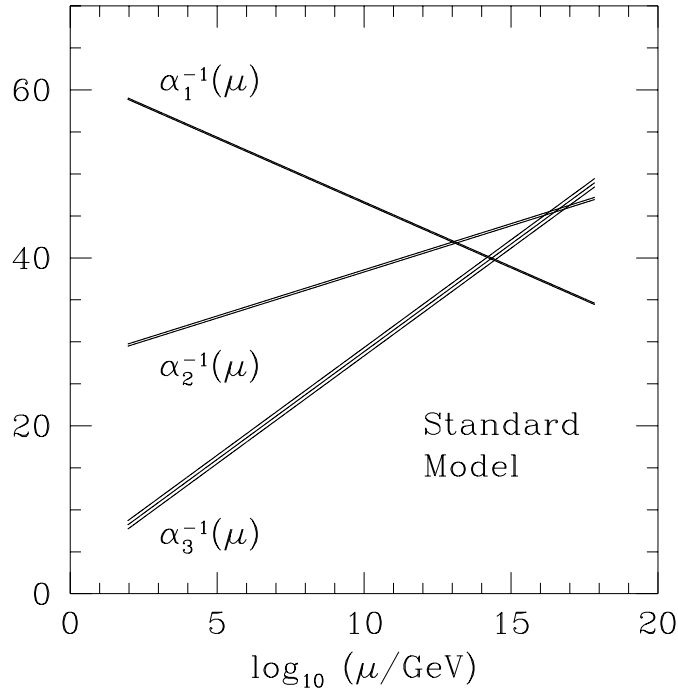


Abbildung 2.1: Skalenabhängigkeit der inversen Eichkopplungen $1/\alpha_i(\mu)$ des SM (inklusive Fehlergrenzen) [27]

kommutierender Generatoren, die Ordnung ist die Gesamtzahl der Generatoren und somit die Dimension der adjungierten Darstellung, und $\text{Dim}(f)$ gibt die Dimension der Fundamentaldarstellung an.

Um eine geeignete Symmetriegruppe G zu finden, sollte diese einer Reihe von Anforderungen genügen:

- Zunächst muß G die SM-Symmetriegruppe G_{SM} als Untergruppe enthalten. Da der Rang von $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ gleich 4 ist, muß auch G mindestens vom Rang 4 sein. Andererseits ist die Forderung nach der Minimalität des Ranges der Eichgruppe sicher sinnvoll, da mit dem Rang auch die Dimension der Darstellungen und somit der Umfang des Teilchenspektrums zunimmt.
- Die Gruppe G sollte komplexe Darstellungen besitzen [28] (eine Darstellung \mathcal{R} heißt komplex, wenn sie zu ihrer komplex konjugierten Darstellung $\overline{\mathcal{R}}$ nicht äquivalent ist; ansonsten wird sie als reell bezeichnet). Diese Forderung ist aus folgendem Grund plausibel:

Sei $\mathcal{R}_{L,R}$ die Darstellung, nach der sich die links- beziehungsweise rechtshändigen Teilchen und Antiteilchen einer Fermionfamilie transformieren. Dann gilt wegen $\Psi_R = C(\bar{\Psi}_L^C)^T$ die Beziehung $\mathcal{R}_R = \overline{\mathcal{R}}_L$. Im SM ist die \mathcal{R}_L entsprechende Darstellung (1.5) komplex, was die Paritätsverletzung und die Nichtexistenz G_{SM} -invarianter

Algebra	Rang	Ordnung	Dim(f)
$SU(n+1), \quad n \geq 1$	n	$n(n+2)$	$n+1$
$SO(2n), \quad n \geq 4$	n	$n(2n-1)$	$2n$
$SO(2n+1), \quad n \geq 2$	n	$n(2n+1)$	$2n+1$
$Sp(2n), \quad n \geq 3$	n	$n(2n+1)$	$2n$
G_2	2	14	7
F_4	4	52	26
E_6	6	78	27
E_7	7	133	56
E_8	8	248	248

Tabelle 2.1: Klassifikation und Eigenschaften einfacher Lie-Algebren

Massenterme zur Folge hat. Um im Rahmen eines GUT-Modells eine reelle Darstellung \mathcal{R}_L verwenden zu können, müssen in ihr neben den SM-Fermionen zusätzlich linkshändige Fermionen liegen, die sich wie das komplex konjugierte von (1.5) transformieren. Diese neuen Teilchen werden auch als Spiegelfermionen bezeichnet. Da sie in der Natur jedoch nicht beobachtet werden, müssen ihre Massen während des Symmetriebrechungsschrittes entstehen, der auf das SM führt, was aufgrund von Mischungen wiederum superschwere Massen auch für die SM-Fermionen zur Folge hat. Dieses Problem läßt sich auf einfache Weise durch Verwendung komplexer Darstellungen für die Fermionen vermeiden. Von den einfachen Lie-Gruppen enthalten jedoch nur

$$SU(n) \quad (n \geq 3), \quad SO(4n+2) \quad (n \geq 2) \quad \text{und} \quad E_6 \quad (2.1)$$

komplexe Darstellungen [29], was die Wahlmöglichkeiten für G stark einschränkt.

- Damit die Renormierbarkeit der Theorie sichergestellt ist, muß sie anomaliefrei sein, also (1.7) erfüllen. Während die orthogonalen Gruppen (außer $SO(6) \cong SU(4)$) [9] und E_6 [30] automatisch anomaliefrei sind, gilt dies bei den $SU(n)$ -Gruppen nur für bestimmte Kombinationen irreduzibler Darstellungen [31]. Im einfachsten Fall, der hier von Interesse ist, nämlich $SU(5)$, ist die (komplexe) Summe

$$\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10} \quad [\oplus \mathbf{1} \equiv \mathbf{16}_{SO(10)}] \quad (2.2)$$

anomaliefrei.

Berücksichtigt man bei der Wahl von G diese Kriterien, so verbleiben folgende Möglichkeiten mit $4 \leq \text{Rang}(G) \leq 6$:

$$\text{Rang 4: } SU(5) ; \text{ Rang 5: } SU(6), SO(10) ; \text{ Rang 6: } SU(7), E_6 \quad (2.3)$$

Auf $SU(5)$, $SO(10)$ und E_6 basierende GUTs werden in den nächsten Abschnitten behandelt; $SU(6)$ - und $SU(7)$ -Theorien bieten gegenüber diesen Modellen keinerlei Vorteile, sind

aber in einigen Punkten wesentlich unhandlicher und deswegen weitgehend unbeachtet geblieben.

Hat man auf diese Weise eine Wahl für die Eichgruppe G getroffen, so sind noch folgende Schritte durchzuführen:

- Die Einbettung von G_{SM} in G und das Schema

$$G \xrightarrow{M_U} G_1 \xrightarrow{M_I^{(1)}} \dots \xrightarrow{M_I^{(k)}} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (2.4)$$

für die Symmetriebrechung in das SM sind anzugeben. Der einfachste Fall, die direkte Symmetriebrechung $G \xrightarrow{M_U} G_{\text{SM}}$, kommt allerdings wegen der Tatsache, daß die laufenden SM-Kopplungen sich nicht in einem Punkt treffen (siehe Abbildung 2.1), nicht in Frage.

- Für jeden Symmetriebrechungsschritt in (2.4) müssen geeignete Higgs-Darstellungen festgelegt und zugehörige Potentiale konstruiert werden, welche ihn realisieren können. Dabei ist darauf zu achten, daß die Teilchen des SM nach wie vor erst im letzten Schritt bei M_Z ihre Massen erhalten, während alle zusätzlichen Teilchen sehr viel schwerer sind und deshalb mindestens Massen der Größenordnung $M_I^{(k)}$ haben. Dieser Sachverhalt wird auch als „Survival Hypothesis“ [32] bezeichnet.
- Die komplexe und anomaliefreie Darstellung, in der die Fermionen liegen sollen, ist auszuwählen. Hierbei muß die Zerlegung der Fermiondarstellung unter G_{SM} die Zuordnung der korrekten SM-Quantenzahlen gestatten, das heißt die SM-Darstellung (1.5) enthalten.

Ist das geschehen, so ist die formale Konstruktion der GUT abgeschlossen. Die expliziten Eigenschaften und Vorhersagen des Modells, wie zum Beispiel Vereinheitlichungsmasse M_U und -kopplung α_U , Fermionmassenrelationen oder die Rate des Protonzerfalls und daraus eventuell resultierende Widersprüche zu experimentellen Resultaten sind dann im Detail zu untersuchen.

2.2 $SU(5)$

2.2.1 Konstruktion und Teilcheninhalt

Die $SU(5)$ -GUT [33] stellt gewissermaßen den Prototyp dieser Theorien dar. Wie oben gezeigt wurde, ist sie die einzige für die Konstruktion einer GUT in Frage kommende Gruppe mit $\text{Rang}(G)=4$. Da die SM-Eichgruppe G_{SM} eine maximale Untergruppe der $SU(5)$ ist, kann nur die direkte Symmetriebrechung

$$SU(5) \xrightarrow{M_U} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (2.5)$$

erfolgen, was wegen des durch Abbildung 2.1 verdeutlichten SM-Kopplungsverhaltens für eine realistische Theorie nicht in Frage kommt. Dennoch sollen hier kurz die grundlegenden Eigenschaften der $SU(5)$ -GUT zusammengefaßt werden, da sie sich zum großen Teil zumindest qualitativ auch auf andere GUT-Modelle übertragen lassen.

Betrachtet man die Verzweigungen der beiden $SU(5)$ -Darstellungen $\bar{\mathbf{5}}$ und $\mathbf{10}$ unter G_{SM}

$$\bar{\mathbf{5}} \longrightarrow (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{10} \longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad (2.6)$$

stellt man fest, daß die reduzible Darstellung $(\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10})$ gerade alle SM-Fermionen einer Familie aufnehmen kann (siehe Tabelle 1.1). Ferner ist sie komplex und anomaliefrei, erfüllt also alle notwendigen Bedingungen. Die gemeinsame Einbettung von Quarks und Leptonen in dieselbe irreduzible Darstellung ist eine Eigenschaft aller GUTs und führt, da die Eichtransformationen diese Teilchen miteinander mischen können, zur Verletzung der Baryon- und Leptonzahlerhaltung.

An dieser Stelle wird ein wesentlicher Erfolg von GUTs deutlich, nämlich die Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung. Sie gehört zu den allgemeinen Eigenschaften von Eichtheorien mit einfacher Symmetriegruppe, da die Eigenwerte der diagonalen Generatoren solcher Gruppen im Gegensatz zu den Eigenwerten der abelschen $U(1)$ stets diskret sind. Der Ladungsoperator Q muß in der Cartan-Unteralgebra von G liegen, also eine Linearkombination der diagonalen Generatoren sein. Da die Generatoren spurfrei sind, gilt dies auch für Q . Daraus folgt wiederum, daß die Summe der Ladungen der in den Darstellungen $\bar{\mathbf{5}}$ und $\mathbf{10}$ liegenden Fermionen jeweils 0 sein muß: $Q(e^-) = 3Q(d)$ und $2Q(u) + Q(e^-) + Q(d) = 0$. Quarks haben deshalb drittelzahlige Ladungen, weil sie in drei Farben auftreten, während Leptonen farbneutral sind.

Betrachtet man G_{SM} als Untergruppe von $SU(5)$, sind die Hyperladungswerte in Tabelle 1.1 mit einem Faktor $\sqrt{5/3}$ umzunormieren. Wegen (1.22), $g' = \sqrt{3/5}g_1$ und $g_1(M_U) = g_2(M_U)$ gilt in GUTs mit einfacher Symmetriegruppe stets $\sin^2 \theta_W(M_U) = 3/8$; der Weinbergwinkel ist kein freier Parameter mehr. Der experimentelle Wert $\sin^2 \theta_W(M_Z) \approx 0.23$ muß durch Integration der entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen reproduziert werden.

Die adjungierte Darstellung, nach der sich in Eichtheorien die Eichbosonen transformieren, verzweigt sich bezüglich G_{SM} gemäß

$$\mathbf{24} \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{5}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-\frac{5}{6}} \quad (2.7)$$

Die ersten drei Summanden entsprechen den SM-Eichbosonen, während die Darstellungen $(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{5}{6}}$ und $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-\frac{5}{6}}$ neue Bosonen enthalten, die mit X und Y beziehungsweise \bar{X} und \bar{Y} bezeichnet werden. Da diese experimentell nicht beobachtet werden, müssen sie Massen der Größenordnung M_U haben.

2.2.2 Protonzerfall

Die X - und Y -Bosonen, welche die elektrischen Ladungen $+4/3$ und $+1/3$ besitzen, tragen sowohl eine Farbladung als auch schwachen Isospin und können deshalb Quarks und

Leptonen ineinander überführen. Während Baryon- und Leptonzahl B, L globale $U(1)$ -Symmetrien des (perturbativen) SM sind, werden sie in der $SU(5)$ -Theorie wie auch in allen anderen GUTs verletzt; allerdings bleibt $B - L$ erhalten. Die direkte Konsequenz der Baryonzahlverletzung ist die Instabilität von Proton und (gebundenem) Neutron. Der Nukleonenzerfall ist eine wichtige und experimentell überprüfbare Vorhersage von GUTs, die über das SM klar hinausgeht [34].

Der baryonzahlverletzende Teil der Lagrangedichte für die erste Fermionfamilie (unter Vernachlässigung von Mischungen) ergibt sich zu [20]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Delta B \neq 0} = & \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{X}_\mu^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+ \right) \\ & + \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{Y}_\mu^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

α, β und γ sind $SU(3)_C$ -Farbindizes. Das entspricht den in Abbildung 2.2 aufgeführten Wechselwirkungsvertizes.

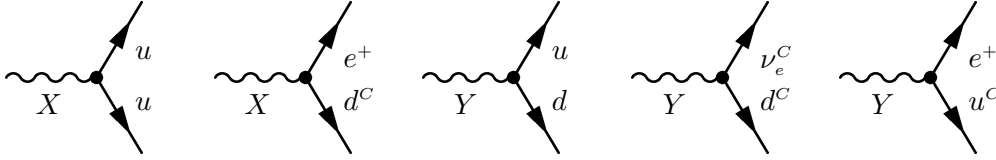


Abbildung 2.2: Baryonzahlverletzende Vertices der X- und Y-Bosonen

Zwei typische Beispiele für Feynmandiagramme von Protonzerfallsprozessen zeigt Abbildung 2.3:

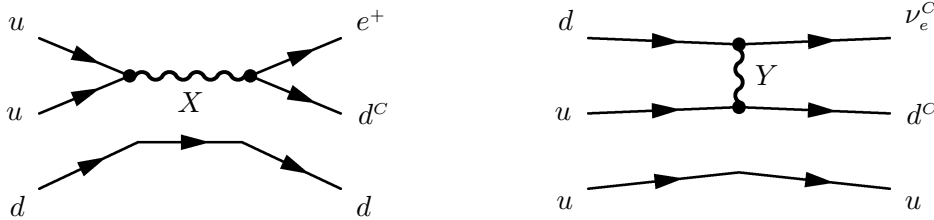


Abbildung 2.3: Beispiele für zum Protonzerfall beitragende Feynmandiagramme

Der zugrundeliegende Prozeß lautet stets Quark+Quark \rightarrow Antiquark+Antilepton, was zu Zerfallskanälen Nukleon \rightarrow Meson+Antilepton führt. Alle anderen Elementarprozesse sind aufgrund von Phasenraumeffekten unterdrückt. Unter der Annahme kleiner Mischungen ist $p \rightarrow \pi^0 e^+$ der dominante Kanal; eine qualitative Abschätzung der Lebensdauer gemäß

$$\Gamma_p = \tau_p^{-1} \approx \alpha_U^2 \frac{m_p^5}{M_{X,Y}^4} \quad (2.9)$$

liefert mit $\alpha_U \approx 1/40$ und $M_{X,Y} \approx M_U \approx 5 \cdot 10^{14}$ GeV für τ_p den Wert $3 \cdot 10^{30}$ Jahre. Die neuesten experimentellen Grenzen liegen bei $\tau_p \geq 2.9 \cdot 10^{33}$ Jahre [35]. Die zu kurze Lebensdauer des Protons war die erste Vorhersage der $SU(5)$ -GUT, die eindeutig im Widerspruch zu experimentellen Resultaten stand.

2.2.3 Symmetriebrechung und Fermionmassen

Um den ersten Symmetriebrechungsschritt in (2.5) zu verwirklichen, benötigt man eine Higgs-Darstellung Φ , die ein SM-Singulett enthält; dieses bildet dann den Vakuumerwartungswert (VEW) aus. Der zweite Brechungsschritt bei M_Z erfordert eine Darstellung H , in der ein SM-Doublett $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$ liegt. Die einfachste Wahl hierfür lautet $\Phi = \mathbf{24}$ und $H = \mathbf{5}$ (siehe (2.6) und (2.7)). Der VEW $\langle \Phi \rangle$ gibt allen Teilchen, die nicht zum SM-Spektrum gehören, Massen der Größenordnung M_U , während $\langle H \rangle$ die SM-Massen erzeugt.

Betrachtet man das Transformationsverhalten von Fermionmassentermen in der $SU(5)$ -Theorie, so ergeben sich die drei Tensorprodukte

$$\bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}} = \bar{\mathbf{10}} \oplus \bar{\mathbf{15}} \quad (2.10)$$

$$\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{50} \quad (2.12)$$

Daran erkennt man zunächst, daß keine Fermionmassen $\sim \langle \Phi \rangle$ entstehen können. Die Kopplung von H an den Term $\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10}$ erzeugt Dirac-Massen für die d -Quarks und die geladenen Leptonen, jene an den Term $\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$ Massen für die u -Quarks. Majorana-Massen für die Neutrinos entstehen nicht, da H nicht an $\bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}}$ koppelt.

Bei M_U gilt die Beziehung $\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_e$, während \mathbf{M}_u von den anderen Massenmatrizen unabhängig ist. Vorhersagen von Relationen zwischen den fermionischen Massenmatrizen gehören zu den typischen Eigenschaften von GUTs. In diesem Fall ist die Vorhersage $\mathbf{M}_d(M_U) = \mathbf{M}_e(M_U)$ nicht realistisch, da sich nach Berücksichtigung der Renormierungseffekte die Beziehung $\mathbf{M}_d(M_Z) \approx 3 \mathbf{M}_e(M_Z)$ ergibt, was im Widerspruch zu den Fermionmassen aus Tabelle 1.6 steht. Durch Einführung einer zusätzlichen $\mathbf{45}$ -Higgs-Darstellung, die wegen (2.10–2.12) ebenfalls Fermionmassen erzeugen kann, ist es möglich, die Relation zwischen \mathbf{M}_d und \mathbf{M}_e so zu modifizieren, daß sie zumindest qualitativ korrekte Ergebnisse liefert [36].

2.2.4 Das Hierarchieproblem

Die $SU(5)$ -GUT enthält zwei verschiedene Symmetriebrechungsskalen M_U und M_Z . Während die SM-Teilchen nach wie vor Massen der Größenordnung M_Z haben sollen, müssen die zusätzlich eingeführten Teilchen Massen $\sim M_U$ besitzen. Das Verhältnis dieser Skalen ist extrem klein, $M_Z/M_U \approx 10^{-12}$. Diese Hierarchie überträgt sich zwangsläufig auf die Parameter im Higgs-Potential V , welches die VEW und damit die Symmetriebrechung

verursacht [37]. Das vollständige Higgs-Potential beinhaltet neben

$$V(\Phi) = -m_1^2 \text{Tr } \Phi^2 + \lambda_1 (\text{Tr } \Phi^2)^2 + \lambda_2 \text{Tr } \Phi^4 \quad \text{und} \quad (2.13)$$

$$V(H) = -m_2^2 H^\dagger H + \lambda_3 (H^\dagger H)^2 \quad (2.14)$$

auch Mischterme der Form

$$V(\Phi, H) = \lambda_4 \text{Tr } \Phi^2 (H^\dagger H) + \lambda_5 (H^\dagger \Phi^2 H) \quad (2.15)$$

Der erste Brechungsschritt erfolgt, wenn Φ den VEW

$$\langle \Phi \rangle = v_1 \cdot \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \text{ mit } v_1^2 = m_1^2 / (60\lambda_1 + 14\lambda_2) \approx M_U^2 \quad (2.16)$$

ausbildet. Die X, Y -Bosonen und die physikalischen Higgs-Teilchen in Φ erhalten Massen $\sim M_U$. Der zweite Schritt verläuft analog zum SM. Berechnet man jedoch die Massen der Teilchen in H , so ergibt sich aufgrund der Potentialterme in (2.15):

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_H : m_T^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5)v_1^2, \quad (\mathbf{1}, \mathbf{2})_H : m_D^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5)v_1^2 \quad (2.17)$$

Sowohl m_T als auch m_D enthalten Terme $\sim v_1$, was im Falle des Triplets $(\mathbf{3}, \mathbf{1})_H$ auch notwendig ist, da es ebenso wie die X, Y -Bosonen Protonzerfälle vermitteln kann; das SM-Doublett $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_H$ dagegen muß Massen $\sim M_Z$ haben. Dies läßt sich wegen $|m_2/v_1| \approx 10^{-12}$ nur dann erreichen, wenn $(30\lambda_4 + 9\lambda_5) \lesssim 10^{-24}$ ist.

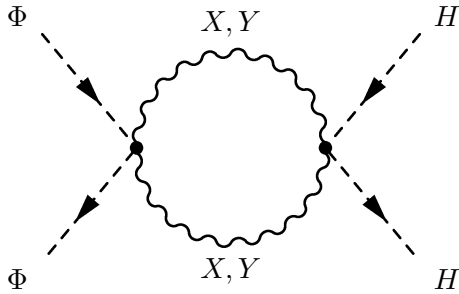


Abbildung 2.4: Zum Hierarchieproblem beitragende Strahlungskorrektur

Die nicht sehr natürlich anmutende Feineinstellung der Parameter $\lambda_{4,5}$ mit einer Genauigkeit $\lesssim 10^{-24}$ muß schließlich für jede Ordnung der Störungstheorie wiederholt werden, da sonst Strahlungskorrekturen wie zum Beispiel die in Abbildung 2.4 gezeigte Beiträge höherer Ordnung zu m_D liefern, die wieder $\sim v_1$ sind [38].

Dieses Hierarchieproblem taucht grundsätzlich in allen Theorien auf, die zwei oder mehr Massenskalen stark unterschiedlicher Größenordnung aufweisen und läßt sich zumindest im Rahmen nichtsupersymmetrischer

GUTs nicht befriedigend lösen. Deswegen geht man im allgemeinen von der Gültigkeit der sogenannten „Extended Survival Hypothesis“ aus [39]. Sie besagt, daß Higgs-Teilchen die größtmögliche Masse erhalten, die mit dem Symmetriebrechungsschema des Modells verträglich ist. Da in der $SU(5)$ -GUT das Triplett $(\mathbf{3}, \mathbf{1})_H$ für den Brechungsschritt bei M_Z ohne Bedeutung ist, hat es eine Masse $\sim M_U$.

2.2.5 Zusammenfassung

Obwohl das $SU(5)$ -Modell aufgrund der experimentellen Fakten mittlerweile ausgeschlossen ist, besitzt es im Vergleich zum SM eine Reihe von attraktiven Eigenschaften:

- Die SM-Wechselwirkungen werden vereinheitlicht; es gibt nur noch eine Kopplungskonstante g_U und eine Vorhersage für $\sin^2 \theta_w(M_U)$.
- Die anomaliefreie Darstellung $(\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10})$ kann die Fermionen einer Familie aufnehmen. Obwohl nach wie vor reduzibel, hat sie eine einfachere Struktur als (1.5).
- Die Einbettung der $U(1)_Y$ in eine einfache Lie-Gruppe führt automatisch zur korrekten Quantisierung der elektrischen Ladung.
- Die Massenmatrizen der Fermionen sind nicht mehr unabhängig voneinander.

Dem stehen folgende Schwierigkeiten gegenüber:

- Die fermionische Darstellung ist reduzibel.
- Der Higgs-Sektor der Theorie ist wesentlich komplexer als im SM.
- Die Existenz zweier stark unterschiedlicher Massenskalen führt zum Hierarchieproblem.
- Die Probleme im Neutrinosektor sind weiterhin ungelöst.
- Auch in der $SU(5)$ -GUT ist das Wechselwirkungsverhalten rechts- und linkshändiger Fermionen verschieden.
- Es gibt keine Erklärung für die Existenz dreier Fermionfamilien und die Massenhierarchie zwischen ihnen.

Einige dieser Schwächen können im Rahmen von GUTs mit größerer Eichgruppe beseitigt werden.

2.3 $SO(10)$

2.3.1 Spinordarstellungen der $SO(n)$ -Gruppen

Die $SO(10)$ ist die kleinste orthogonale Gruppe, die G_{SM} als Untergruppe enthält und komplexe Darstellungen besitzt. Da $SU(5) \otimes U(1)$ eine maximale Untergruppe der $SO(10)$ ist, sind alle vorteilhaften Eigenschaften der $SU(5)$ -GUT auch in $SO(10)$ -Theorien vorhanden.

Die orthogonalen Lie-Gruppen unterscheiden sich in einigen wichtigen Punkten von den unitären Gruppen [25]. Alle irreduziblen Darstellungen der $SU(n)$ können durch Reduktion von Tensorprodukten der komplexen Fundamentaldarstellung \mathbf{n} und der zu ihr komplex konjugierten Darstellung $\bar{\mathbf{n}}$ erhalten werden. Die orthogonalen Gruppen $SO(n)$ dagegen besitzen neben den Tensordarstellungen, welche man durch Produktbildung aus der reellen Fundamentaldarstellung \mathbf{n} konstruieren kann, die sogenannten Spinordarstellungen, für die das nicht gilt. Zu den Spinordarstellungen der $SO(n)$ gelangt man über die komplexe Clifford-Algebra

$$C_n : \quad \{ \Gamma_j, \Gamma_k \} = 2\delta_{jk} \mathbf{1} \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (2.18)$$

Aus den Generatoren von C_n kann man eine Darstellung für die Generatoren der $SO(n)$ -Lie-Algebra konstruieren:

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4} [\Gamma_j, \Gamma_k] \quad (2.19)$$

Die so definierten Σ_{jk} erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[\mathcal{M}_{ij}, \mathcal{M}_{kl}] = i (\delta_{ik} \mathcal{M}_{jl} - \delta_{il} \mathcal{M}_{jk} - \delta_{jk} \mathcal{M}_{il} + \delta_{jl} \mathcal{M}_{ik}), \quad (2.20)$$

welche die $SO(n)$ -Algebra definiert ($\mathcal{M}_{ij} = -\mathcal{M}_{ji}$ mit $i, j = 1, \dots, n$). Die Generatoren \mathcal{M}_{ij} in der Fundamentaldarstellung sind durch

$$(\mathcal{M}_{ij})_{ab} = -i (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ja} \delta_{ib}) \quad (2.21)$$

gegeben. Über die Matrixdarstellungen der komplexen Clifford-Algebra (2.18) und somit der Σ_{jk} kommt man zu den Spinoren, da diese die Elemente des entsprechenden Darstellungsraumes sind. Die Eigenschaften der irreduziblen Spinordarstellungen der $SO(n)$ hängen vom Wert von n ab:

- Ist n ungerade, so existiert eine reelle Spinordarstellung der Dimension $2^{(n-1)/2}$.
- Ist n gerade, so existieren zwei inäquivalente Spinordarstellungen der Dimension $2^{(n/2-1)}$. Wenn $n/2$ gerade ist, so sind die beiden Darstellungen reell, während sie für ungerades $n/2$ komplex sind, wobei dann die eine das komplex Konjugierte der anderen ist.

Aus diesem Grunde verfügen nur die $SO(4n+2)$ -Gruppen über komplexe Darstellungen; im Falle der $SO(10)$ sind dies die **16** und die $\overline{\mathbf{16}}$.

2.3.2 Teilcheninhalt und Symmetriebrechung

Die Hauptmotivation für die Konstruktion von $SO(10)$ -GUTs [40] wird deutlich, wenn man die Verzweigung der **16** bezüglich der Untergruppe $SU(5)$ betrachtet:

$$\mathbf{16} \longrightarrow \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{1} \quad (2.22)$$

In einer **16** können demnach alle Fermionen einer Familie und ein zusätzliches $SU(5)$ -Singulett untergebracht werden. Dieses Singulett besitzt exakt die Eigenschaften und Quantenzahlen des rechtshändigen Neutrinos (beziehungsweise linkshändigen Antineutrinos), da es zur G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ identisch ist.

Hier wird ein großer Vorteil von $SO(10)$ -Modellen gegenüber der $SU(5)$ -GUT deutlich, denn alle Fermionen einer Generation inklusive eines linkshändigen Antineutrinos liegen in einer irreduziblen und komplexen Darstellung der Eichgruppe. Ferner erklärt die Anomaliefreiheit der orthogonalen Gruppen auf natürliche Weise das Verschwinden der Anomalie der $SU(5)$ -Darstellung $\mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{5}}$.

$SO(10)$ -Modelle sind überdies zumindest im Eichboson- und Fermionsektor manifest C - und P -invariant. Da in der **16** die linkshändigen Teilchen und Antiteilchen liegen, wird sie durch Anwendung von C auf sich selbst abgebildet. Unter P wird die **16** auf die **$\overline{16}$** abgebildet, in welcher die rechtshändigen Teilchen und Antiteilchen untergebracht sind. C - und P -Verletzung kann entweder explizit im Higgs-Sektor oder durch die spontane Symmetriebrechung realisiert werden.

Da der Rang der $SO(10)$ um eins größer als der von G_{SM} ist, existiert eine Vielzahl von möglichen Symmetriebrechungsschemata. Die direkte Brechung in das SM ist dabei ebenso wie die Brechung nach $SU(5) [\otimes U(1)]$ zwar möglich, aber wegen der in Abbildung 2.1 gezeigten SM-Kopplungsentwicklung phänomenologisch ausgeschlossen. Man benötigt demnach mindestens einen Zwischenschritt, das heißt

$$SO(10) \xrightarrow{M_U} G_I \xrightarrow{M_I} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (2.23)$$

Es sind Modelle mit bis zu vier aufeinander folgenden intermediären Symmetriegruppen konstruiert und ausführlich untersucht worden [41, 42], jedoch besitzen sie gegenüber Modellen mit nur einer solchen keine besonderen Vorzüge. Tabelle 2.2 gibt die verschiedenen Möglichkeiten für den Brechungsschritt $SO(10) \rightarrow G_I$ bei M_U und die dafür zu verwendende Higgs-Darstellung mit einem G_I -Singulett an.

Symmetriegruppe G_I	Higgs-Darstellung Φ
$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$	210
$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$	54
$SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_R$	45
$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$	45, 210
$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \otimes D$	210
$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_R \otimes U(1)_{B-L}$	210

Tabelle 2.2: Intermediäre Symmetriegruppen in $SO(10)$ -GUTs

Die D -Parität [43] ist eine diskrete Symmetrie, welche $SU(2)_L$ und $SU(2)_R$ vertauscht; sie erfordert ein rechts-links-symmetrisches Teilchenspektrum. Wenn die Theorie also Teilchen in einer $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Darstellung (m, n) enthält, muß auch eine Darstellung (n, m) vorhanden sein. Dies hat zur Folge, daß die beiden Eichkopplungen $g_{2L}(\mu)$ und $g_{2R}(\mu)$ überall zwischen M_U und M_I gleich groß sind und die Parität erhalten ist.

Welche Symmetriegruppe G_I durch die Brechung mittels einer bestimmten Darstellung Φ realisiert wird, hängt von den jeweiligen Werten der Parameter im Higgs-Potential $V(\Phi)$ ab [44]. Die Symmetriebrechung bei M_I in das SM erfolgt in allen Fällen über einen VEW des G_{SM} -Singulett einer $SO(10)$ -Darstellung **126**.

In dieser Arbeit soll ein $SO(10)$ -Modell mit intermediärer $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \equiv G_{\text{PS}}$ -Symmetrie untersucht werden. Diese Gruppe gehört zu den maximalen Untergruppen

der $SO(10)$ und ist von Pati und Salam für eine Erweiterung des SM durch eine rechts-links-symmetrische Theorie vorgeschlagen worden [45]. Allerdings hat sich gezeigt, daß Modelle mit $G_{\text{PS}} \otimes D$ -Symmetrie für M_U den Wert $\approx 10^{15}$ GeV liefern, welcher auf eine zu kurze Protonlebensdauer führt [42]. G_{PS} -Modelle ohne D -Parität besitzen diesen Nachteil nicht. Der $SU(2)_L$ -Faktor ist identisch mit dem in G_{SM} , die $SU(2)_R$ ist das rechtshändige Gegenstück dazu, und die $SU(4)_C$ schließlich ist eine erweiterte Farbgruppe mit der $B-L$ -Quantenzahl als „vierter Farbe“. In $SO(10)$ -basierten Modellen ist $B-L$ bei Skalen $\mu \gtrsim M_I$ eine lokale $U(1)$ -Symmetrie, also Teil der Eichgruppe, und keine globale Symmetrie wie in der $SU(5)$ -GUT. Das hat zur Folge, daß auch Bosonen nichtverschwindendes $B-L$ besitzen können.

Die Fermiondarstellung **16** verzweigt sich bezüglich G_{PS} und $SU(3)_C \otimes SU(2)_L$ gemäß

$$\mathbf{16} \longrightarrow (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu_e \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^- \end{pmatrix}_L \oplus \begin{pmatrix} d_1^C & d_2^C & d_3^C & e^+ \\ -u_1^C & -u_2^C & -u_3^C & -\nu_e^C \end{pmatrix}_L \\ &\longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus 2(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der Operator der elektrischen Ladung ist durch $Q = T_{3L} + T_{3R} + (B-L)/2$ gegeben, die SM-Hyperladung durch $Y = T_{3R} + (B-L)/2$. Die adjungierte Darstellung **45**, in der die Eichbosonen liegen, verzweigt sich bezüglich G_{PS} wie

$$\mathbf{45} \longrightarrow (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{6}) \quad (2.26)$$

Die ersten drei Faktoren entsprechen den G_{PS} -Eichbosonen. Die $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{6})$ enthält neben den aus der $SU(5)$ -GUT bekannten X - und Y -Bosonen die ebenfalls baryon- und leptonzahlverletzende Prozesse vermittelnden X' - und Y' -Bosonen (und deren Antiteilchen); sie haben die Ladungen $+2/3$ beziehungsweise $-1/3$ und Massen der Größenordnung M_U . Abbildung 2.5 zeigt die zugehörigen Wechselwirkungsvertizes. In der $(\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ liegen die acht Gluonen der QCD, ein an $B-L$ koppelndes neutrales Boson und die $SU(3)_C$ -Tripletts X_3 und \bar{X}_3 mit $Q(X_3) = +2/3$.

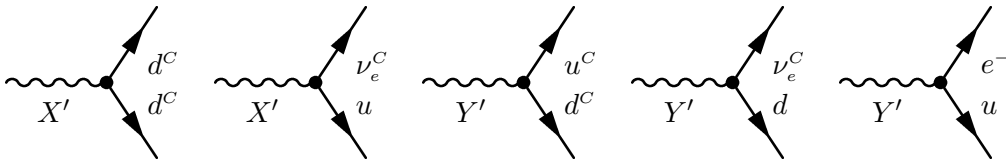


Abbildung 2.5: Baryonzahlverletzende Vertizes der X' - und Y' -Bosonen

Der vollständige baryonzahlverletzende Teil der $SO(10)$ -Lagrangedichte für die erste

Fermionfamilie und ohne Mischungen lautet [20]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Delta B \neq 0} = & \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{X}_\mu^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+ \right) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{Y}_\mu^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ \right) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} X_\mu'^\alpha \left(-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{d}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL}^C - \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C \right) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} Y_\mu'^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{d}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta - \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL}^C - \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+ \right) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} X_{3\mu}^\alpha \left(\bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^- + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^- + \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR} \right) \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Durch direkten X_3 -Austausch können keine Nukleonenzerfälle vermittelt werden, was auch notwendig ist, da deren Massen der Größenordnung M_I zu sehr großen Zerfallsraten führen würden. Durch X_3 - X' -Mischung entstehen in höheren Ordnungen $B-L$ -verletzende Nukleonenzerfälle, die aber gegenüber den Prozessen führender Ordnung durch zusätzliche Faktoren $1/M_U$ unterdrückt sind [34].

2.3.3 Fermionmassen

Dirac-Massenterme für die geladenen Fermionen und die Neutrinos haben die Struktur $m(\Psi_L^C)^T C \Psi_L$ und besitzen demnach das $SO(10)$ -Transformationsverhalten

$$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{120} \oplus \mathbf{126} \tag{2.28}$$

Die Fermionmassen und die Symmetriebrechung $G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ kommen also zustande, wenn die farblosen und elektrisch neutralen Komponenten von Higgs-Teilchen in den Darstellungen $\overline{\mathbf{10}}$, $\overline{\mathbf{120}}$ oder $\overline{\mathbf{126}}$ einen VEW der Größenordnung M_Z ausbilden. Diese Darstellungen verzweigen sich folgendermaßen unter G_{PS} (siehe Anhang A.2):

$$\mathbf{10} \longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \tag{2.29}$$

$$\mathbf{120} \longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \tag{2.30}$$

$$\mathbf{126} \longrightarrow (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \tag{2.31}$$

Da die linkshändigen Teilchen in $(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ und die linkshändigen Antiteilchen in $(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ liegen, wird die Erzeugung von Dirac-Massen wegen

$$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \tag{2.32}$$

durch die $SU(2)_L$ -Doublets in den G_{PS} -Darstellungen $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ der $\mathbf{10}$ und $\mathbf{120}$ sowie denen in den $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ der $\mathbf{120}$ und $\mathbf{126}$ vermittelt. Ferner können aufgrund von

$$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus \dots \tag{2.33}$$

$$(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \otimes (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus \dots \tag{2.34}$$

über den Term $\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} \otimes \overline{\mathbf{126}}$ auch Majorana-Massen für die links- und rechtshändigen Neutrinos auftreten. Da der VEW des SM-Singulets in $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ den Symmetriebrechungsschritt $G_{\text{PS}} \xrightarrow{M_I} G_{\text{SM}}$ realisiert, sind die Majorana-Massen der rechtshändigen Neutrinos zwangsläufig von der Größenordnung M_I .

Die verschiedenen Yukawa-Kopplungen und VEW der $\mathbf{10}$, $\mathbf{120}$ und $\mathbf{126}$ sind in Tabelle 2.3 zusammengefaßt (die Indizes numerieren mehrere Darstellungen einer Art, wenn vorhanden). Damit die beiden VEW, die zu jeder G_{PS} -Darstellung gehören, verschieden sein können,

Higgs-Darstellung	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10}^{(i)}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120}^{(j)}$	$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120}^{(k)}$	$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{126}^{(l)}$
Yukawa-Kopplungsmatrix	$\mathbf{Y}_{10}^{(i)}$	$\mathbf{Y}_{120}^{(j)}$	$\mathbf{Y}_{120}^{(k)}$	$\mathbf{Y}_{126}^{(l)}$
Vakuumerwartungswerte	$v_u^{(i)}, v_d^{(i)}$	$\tilde{v}_u^{(j)}, \tilde{v}_d^{(j)}$	$\tilde{\omega}_u^{(k)}, \tilde{\omega}_d^{(k)}$	$\omega_u^{(l)}, \omega_d^{(l)}$

Tabelle 2.3: Higgs-Kopplungen und Vakuumerwartungswerte in $SO(10)$ -GUTs

muß diese komplex sein. Das läßt sich durch Kombination zweier reeller Darstellungen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ zu $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2$ erreichen.

Mit den in Tabelle 2.3 festgelegten Bezeichnungen für die Kopplungen und VEW (unter Vernachlässigung der oberen Indizes) ergeben sich für die Fermionmassenmatrizen in einer $SO(10)$ -GUT folgende Identitäten [46]:

$$\mathbf{M}_d = v_d \mathbf{Y}_{10} + \omega_d \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_d + \tilde{\omega}_d) \mathbf{Y}_{120} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{M}_e = v_d \mathbf{Y}_{10} - 3\omega_d \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_d - 3\tilde{\omega}_d) \mathbf{Y}_{120} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{M}_u = v_u \mathbf{Y}_{10} + \omega_u \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_u + \tilde{\omega}_u) \mathbf{Y}_{120} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})} = v_u \mathbf{Y}_{10} - 3\omega_u \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_u - 3\tilde{\omega}_u) \mathbf{Y}_{120} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \sim M_I \mathbf{Y}_{126} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} \sim \frac{\omega_u^2}{M_I} \mathbf{Y}_{126} \quad (2.40)$$

Die Beziehungen (2.35-2.40) sind in $SO(10)$ -Theorien mit intermediärer $G_{\text{PS}} [\otimes D]$ -Symmetrie im gesamten Bereich oberhalb von M_I gültig, während sie für die anderen G_I in Tabelle 2.2 nur oberhalb von M_U gelten.

In (2.35-2.40) ist zu berücksichtigen, daß \mathbf{Y}_{10} und \mathbf{Y}_{126} symmetrisch sind, während \mathbf{Y}_{120} antisymmetrisch ist. Um Modelle mit asymmetrischen Massenmatrizen konstruieren zu können, muß also mindestens eine $\mathbf{120}$ an der Massenerzeugung beteiligt sein. Die Faktoren (-3) sind Clebsch-Gordan-Koeffizienten, welche auf der nichttrivialen $SU(4)_C$ -Struktur der $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ beruhen.

Wird im einfachsten Fall lediglich eine (komplexe) $\mathbf{10}$ verwendet, gilt zwischen den Massenmatrizen die Beziehung

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_d \sim \mathbf{M}_u = \mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})}, \quad (2.41)$$

in der die $SU(5)$ -Vorhersage $\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_d$ enthalten ist. Genauso wie dort führt (2.41) aber zu falschen Werten für die Fermionmassen bei M_Z . Verwendet man Modelle mit

komplizierterer Higgs-Struktur, kann man Massen und Mischungen der Fermionen korrekt beschreiben.

Die beiden Majorana-Massenmatrizen der Neutrinos sind nur bis auf konstante Vorfaktoren bekannt, die wiederum von der expliziten Form des Higgs-Potentials und den Werten der Parameter in diesem abhängen. Da es für Modelle mit nichtminimalem Higgs-Inhalt praktisch unmöglich ist, das zugehörige Potential im Detail zu analysieren, kann man lediglich plausible Annahmen über die Vorfaktoren machen. Wir werden im folgenden davon ausgehen, daß sie betragsmäßig zwischen $1/100$ und 100 liegen. Majorana-Massenmatrizen sind aufgrund der Spinor-Struktur (1.10-1.11) der entsprechenden Massenterme stets symmetrisch. Im Rahmen von $SO(10)$ -Modellen können sie nur durch Kopplungen an **126**-Darstellungen erzeugt werden.

Die Majorana-Massen der linkshändigen Neutrinos, die durch einen VEW der $(\overline{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ in (2.33) entstehen können, müssen sehr klein sein, da sie sonst zu beobachtbaren Effekten in durch neutrale schwache Ströme vermittelten Prozessen führen würden. Die Konstruktion eines Potentials, in dem dieser VEW verschwindet, stößt jedoch auf formale Probleme, denn in höheren Ordnungen treten Divergenzen auf, die nur dann absorbiert werden können, wenn der VEW der $(\overline{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ ungleich Null ist [47]. Es kann allerdings gezeigt werden, daß er von der Größenordnung ω_u^2/M_I sein muß [48] und somit gegenüber den Dirac-Massen um einen Faktor ω_u/M_I unterdrückt ist und vernachlässigt werden kann.

Bei Skalen unterhalb von M_I ist das Teilchenspektrum das des SM. Das Higgs-Doublet im SM ist eine bestimmte Linearkombination aus den $SU(2)_L$ -Doublets in den $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ - und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ -Darstellungen, welche an der Massenerzeugung mitwirken. Die übrigen Linearkombinationen haben Massen $\sim M_I$ und treten im SM deshalb nicht in Erscheinung [49].

2.3.4 See-Saw-Mechanismus

Die Massen der linkshändigen Neutrinos müssen, wenn sie von Null verschieden sind, sehr viel kleiner als die der geladenen Fermionen sein. Die Obergrenzen aus den Experimenten zur direkten Messung von Neutrinomassen liegen bei $m_{\nu_e} < 15$ eV (Untersuchung des β -Spektrums von Tritium), $m_{\nu_\mu} < 0.17$ MeV (aus π -Zerfällen) und $m_{\nu_\tau} < 18.2$ MeV (aus τ -Zerfällen) [7]. Kosmologische Argumente schränken die Grenzen der Massenwerte weiter ein [50]; damit die kritische Dichte des Universums nicht überschritten wird, muß für die Summe der Massen leichter stabiler Neutrinos $\sum_i m_{\nu_i} < 30$ eV gelten. Rechtshändige Neutrinos dagegen müssen sehr massiv sein, da sie experimentell nicht beobachtet werden.

Der See-Saw-Mechanismus [51] liefert in Modellen mit rechtshändigen Neutrinos und einer Skala $M_I \gg M_Z$, bei der die Leptonzahlerhaltung verletzt wird, eine natürliche Erklärung für die oben angegebenen Eigenschaften des Neutrinomassenspektrums. Seine Wirkungsweise soll zunächst am einfachen Fall einer Fermionengeneration verdeutlicht werden.

Der allgemeinste Massenterm für das Neutrino ν lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= -\frac{1}{2} m_R^{(\text{Maj})} \bar{\nu}_L^C \nu_R - \frac{1}{2} m_L^{(\text{Maj})} \bar{\nu}_L \nu_R^C - m^{(\text{Dir})} \bar{\nu}_L \nu_R + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_L^C \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \nu_R^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (2.42)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_L^{(\text{Maj})} & m^{(\text{Dir})} \\ m^{(\text{Dir})} & m_R^{(\text{Maj})} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

In $SO(10)$ -GUTs mit intermediärer Symmetrie gelten die Relationen

$$\frac{m^{(\text{Dir})}}{m_R^{(\text{Maj})}} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{m_L^{(\text{Maj})}}{m^{(\text{Dir})}} \ll 1, \quad (2.44)$$

da, wie im vorigen Abschnitt erläutert wurde, $m^{(\text{Dir})}$ dieselbe Größenordnung wie die Masse des positiv geladenen Quarks hat und $m_R^{(\text{Maj})}$ von der Ordnung der $B-L$ -brechenden Skala M_I ist; $m_L^{(\text{Maj})}$ wiederum ist gegenüber $m^{(\text{Dir})}$ stark unterdrückt.

Die Diagonalisierung von \mathbf{M} führt (abgesehen von Korrekturen $\sim m^{(\text{Dir})}/m_R^{(\text{Maj})}$) auf die Masseneigenzustände

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_L + \nu_R^C) \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_R + \nu_L^C) \quad (2.45)$$

und ihre Massen

$$m_{\nu_1} \approx m_L^{(\text{Maj})} - \left(\frac{m^{(\text{Dir})}}{m_R^{(\text{Maj})}} \right) m^{(\text{Dir})} \approx - \left(\frac{m^{(\text{Dir})}}{m_R^{(\text{Maj})}} \right) m^{(\text{Dir})} \quad (2.46)$$

$$m_{\nu_2} \approx m_R^{(\text{Maj})} + \left(\frac{m^{(\text{Dir})}}{m_R^{(\text{Maj})}} \right) m^{(\text{Dir})} \approx m_R^{(\text{Maj})} \quad (2.47)$$

Anstelle eines Dirac-Neutrinos $\nu = \nu_L + \nu_R$ erhält man auf diese Weise zwei Majorana-Neutrinos ν_1 und ν_2 (es gilt $\nu_{1,2}^C = \nu_{1,2}$) mit Massen $m_{\nu_{1,2}}$, wobei $m_{\nu_1} \ll M_Z \ll m_{\nu_2}$ ist. Das leichte Majorana-Neutrino ν_1 entspricht dem Neutrino des SM; das rechtshändige Antineutrino des SM ist identisch mit $\nu_{1R} \equiv \nu_{1R}^C$. Das schwere Neutrino ν_2 ist aufgrund seiner Masse $m_{\nu_2} \sim M_I$ nicht beobachtbar.

Aus (2.46) und (2.47) folgt die „See-Saw“-Relation

$$m_{\nu_1} \cdot m_{\nu_2} \approx -m^{(\text{Dir})} \cdot m^{(\text{Dir})} \lesssim -M_Z^2; \quad (2.48)$$

je schwerer ν_2 ist, desto leichter wird ν_1 .

Die Verallgemeinerung von (2.42) auf den Fall von n Fermionfamilien liefert

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_L^C \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \nu_R^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.49)$$

mit n -dimensionalen Vektoren $\nu_{L,R}$ und der symmetrischen $(2n \times 2n)$ -Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} & \mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})} \\ (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})^T & \mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Hier sind die nichtverschwindenden Einträge von $\mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})}$ betragsmäßig sehr viel kleiner als die von $\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})}$, und diese sind wiederum sehr viel kleiner als die von $\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})}$ (siehe auch (2.38-2.40)). Indem man \mathbf{M} auf blockdiagonale Form bringt, erhält man n leichte Majorana-Neutrinos ν_i mit der symmetrischen Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\nu} \approx \mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} - \mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})} (\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})^{-1} (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})^T \approx -\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})} (\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})^{-1} (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})^T, \quad (2.51)$$

der sogenannten See-Saw-Matrix, und n schwere Majorana-Neutrinos N_i mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M}_N \approx \mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} + \mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})} (\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})^{-1} (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})^T \approx \mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \quad (2.52)$$

Die Diagonalisierung von \mathbf{M}_{ν} und \mathbf{M}_N

$$\mathbf{N}_L^{\dagger} \mathbf{M}_{\nu} \mathbf{N}_L = \mathbf{M}_{\nu}^{(D)}, \quad \mathbf{N}_R^{\dagger} \mathbf{M}_N \mathbf{N}_R = \mathbf{M}_N^{(D)} \quad (2.53)$$

liefert für $n = 3$ die physikalischen Neutrinos $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$ beziehungsweise N_e, N_{μ}, N_{τ} sowie deren Massen und Mischungen. Letztere haben nun Auswirkungen auf die leptonischen Anteile der geladenen schwachen Ströme im SM, welche sich beim Übergang von Wechselwirkungs- zu Masseneigenzuständen analog zu (1.31) gemäß

$$\bar{\nu}_L^{a(0)} \gamma^{\mu} e_L^{a(0)} W_{\mu}^{+} \implies (\mathbf{N}_L^{\dagger} \mathbf{E}_L)_{ab} \bar{\nu}_L^b \gamma^{\mu} e_L^a W_{\mu}^{+} \quad (2.54)$$

$$\bar{e}_L^{a(0)} \gamma^{\mu} \nu_L^{a(0)} W_{\mu}^{-} \implies \bar{e}_L^a \gamma^{\mu} (\mathbf{E}_L^{\dagger} \mathbf{N}_L)_{ab} \nu_L^b W_{\mu}^{-} \quad (2.55)$$

ändern (a und b sind Familienindizes). Die unitäre Matrix $\mathbf{U} \equiv \mathbf{E}_L^{\dagger} \mathbf{N}_L$ entspricht der CKM-Matrix im Quarksektor und kann in Neutrino-Oszillationsexperimenten gemessen werden. Die beobachtbaren Effekte der Neutrinomassen und -mischungen werden im nächsten Kapitel erläutert.

2.3.5 Zusammenfassung

Im Vergleich zur $SU(5)$ -GUT sind $SO(10)$ -Modelle mit intermediärer Symmetrie phänomenologisch sehr erfolgreich, und es sind bis heute keine experimentellen Resultate bekannt, die sie ausschließen. Zusätzlich zu den positiven Eigenschaften, welche schon die $SU(5)$ besaß, kommen hier folgende Vorzüge:

- Alle Fermionen einer Generation, einschließlich des rechtshändigen Neutrinos, liegen in einer irreduziblen Darstellung.
- Die Eigenschaften der Neutrinos, insbesondere deren Massen und Mischungen, können durch den See-Saw-Mechanismus befriedigend erklärt werden.

- Die $SO(10)$ ist automatisch anomaliefrei, enthält $B - L$ als lokale Symmetrie und besitzt rechts-links-symmetrische Untergruppen.

Die Probleme, welche weder in $SO(10)$ -Modellen noch in anderen GUTs gelöst werden können, sind im letzten Abschnitt zusammengefaßt.

2.4 E_6

Die E_6 [30, 52] ist die einzige exzeptionelle Lie-Gruppe mit komplexen Darstellungen. Zu den maximalen Untergruppen der E_6 gehören die für die Symmetriebrechung nach G_{SM} in Frage kommenden $SO(10) \otimes U(1)$ und $[SU(3)]^3$. Letztere kann man als $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes SU(3)_C$ -Symmetrie interpretieren.

Die Fermionen einer Generation liegen in der komplexen Fundamentaldarstellung **27**, welche sich bezüglich der $SO(10)$ und $[SU(3)]^3$ gemäß

$$\mathbf{27} \longrightarrow \mathbf{16} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{1} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{27} \longrightarrow (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}) \quad (2.57)$$

verzweigt. Im Gegensatz zu den $SU(5)$ - und $SO(10)$ -Modellen enthält die E_6 -GUT zusätzliche Fermionen, die im SM nicht beobachtet werden und somit superschwer sein müssen. In der **10** liegen ein Quark D mit Ladung $-1/3$, ein leptonisches $SU(2)_L$ -Doublett (N, E) sowie die zugehörigen Antiteilchen; das $SO(10)$ -Singulett wird mit L bezeichnet.

Die adjungierte Darstellung **78** der E_6 enthält die Eichbosonen der Theorie. Die im Vergleich zur $SO(10)$ neu hinzukommenden Eichbosonen koppeln sowohl an die superschweren als auch an die SM-Fermionen und liefern zu Nukleonzerfällen keine Beiträge.

Die Fermionmassen besitzen das E_6 -Transformationsverhalten

$$\mathbf{27} \otimes \mathbf{27} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{351} \oplus \mathbf{351}', \quad (2.58)$$

wobei die **351** und die **351'** inäquivalent sind. Unter $SO(10)$ verzweigen sich diese beiden Darstellungen wie

$$\mathbf{351} \longrightarrow \mathbf{1} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{126} \oplus \dots \quad (2.59)$$

$$\mathbf{351}' \longrightarrow \mathbf{10} \oplus \mathbf{120} \oplus \dots \quad (2.60)$$

Die **351** kann E_6 in die $SO(10)$ brechen, ohne daß die SM-Fermionen Massen der Größenordnung M_U bekommen; in diesem Brechungsschritt werden nur Massen für die neuen Fermionen erzeugt. Die Brechung $G_{\text{SM}} \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ und die Erzeugung der SM-Massen werden durch die Higgs-Darstellung $\bar{\mathbf{27}}$ realisiert. Um asymmetrische Massenmatrizen erhalten zu können, muß eine **351'** vorhanden sein.

Die kleinste Darstellung, welche die Symmetriebrechung $E_6 \rightarrow [SU(3)]^3$ realisieren kann, ist die **650**. In beiden Brechungsschemata ergeben sich Lebensdauern für das Proton, die weit oberhalb des experimentell zugänglichen Bereichs liegen.

Offensichtlich ist die allgemeine Struktur von E_6 -GUTs wesentlich komplizierter als die von $SO(10)$ -Modellen; insbesondere die Existenz exotischer superschwerer Fermionen kommt neu hinzu. Dem steht als Vorteil die Möglichkeit gegenüber, Fermionmassen und -mischungen durch Strahlungskorrekturen zu erzeugen [53].

2.5 Probleme und Grenzen von GUTs

Wie in diesem Kapitel dargestellt wurde, können GUTs viele Schwächen des SM erfolgreich beheben. Ferner liefern sie eine Reihe von zumindest grundsätzlich überprüfbaren Vorhersagen wie zum Beispiel die Instabilität der Nukleonen oder die Neutrinomassen und -mischungen. Es gibt jedoch auch Probleme, die im Rahmen von nichtsupersymmetrischen GUT-Modellen nicht gelöst werden können. Man kann sie in rein technische und fundamentale Probleme unterteilen.

Zu den ersteren gehören das schon erwähnte Hierarchieproblem und die daraus resultierenden Feineinstellungen verschiedener Parameter. Diese Feineinstellungen sind bezüglich Strahlungskorrekturen instabil, so daß sie für jede Ordnung der Störungstheorie durchgeführt werden müssen. Das θ_{QCD} -Problem ($\theta_{\text{QCD}} \lesssim 10^{-9}$) gehört ebenfalls in diese Kategorie.

Ungelöste fundamentale Fragestellungen sind die Abwesenheit der Gravitationswechselwirkung in GUTs, eine fehlende Erklärung für die Existenz dreier Fermionfamilien und ein hohes Maß an Unbestimmtheit im Higgs-Sektor der Modelle. Auch der Ursprung der Massenhierarchie der Fermionen kann nicht geklärt werden, obwohl es in GUTs im Gegensatz zum SM Beziehungen zwischen den Massenmatrizen der verschiedenen Fermionarten gibt.

Eine wirklich befriedigende Lösung dieser Probleme im Rahmen einer fundamentaleren Theorie als den hier geschilderten GUT-Modellen steht jedoch bis heute aus.

Kapitel 3

Neutrino-Oszillationen

3.1 Theoretische Grundlagen

Neutrino-Oszillationen [16, 54] können auftreten, wenn die Masseneigenzustände der Neutrinos nicht mit den Wechselwirkungseigenzuständen übereinstimmen. Dies ist in $SO(10)$ -Modellen mit intermediärer Symmetrie im allgemeinen der Fall, da der See-Saw-Mechanismus aus Abschnitt 2.3.4 für die leichten Majorana-Neutrinos ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) die üblicherweise nichtdiagonale Massenmatrix (2.51) liefert. Wenn die Mischungsmatrix $\mathbf{N}_L \neq \mathbf{1}$ ist, sind die ν_α Linearkombinationen der Neutrinos ν_k ($k=1,2,3$) mit den Massen m_k , wobei $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ gelten soll:

$$\nu_{\alpha L, R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{k L, R}, \quad \mathbf{U} \equiv \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{N}_L \quad (3.1)$$

Die schweren Neutrinos N_α entkoppeln bei Skalen $\mu \sim M_I$ und spielen für die in diesem Kapitel geschilderten Phänomene keine Rolle.

3.1.1 Vakuumoszillationen

Zunächst sollen Oszillationen im Vakuum betrachtet werden. Der quantenmechanische Zustand eines zur Zeit $t = 0$ in einem elektroschwachen Prozeß erzeugten relativistischen Neutrinos ν_α mit Impuls $p \gg m_k$ ist durch

$$|\nu_\alpha(x, t = 0)\rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k} e^{ipx} |\nu_k(x, t = 0)\rangle \quad (3.2)$$

gegeben. Die Zeitentwicklung der Zustände $|\nu_k(x, t = 0)\rangle$ gemäß der Schrödinger-Gleichung liefert unter Verwendung von

$$E = E(\nu_k) = \sqrt{p^2 + m_k^2} \approx p + \frac{m_k^2}{2p} \quad \text{und} \quad x \approx ct \quad (c \equiv 1) \quad (3.3)$$

für $|\nu_\alpha(x)\rangle$ die Beziehung

$$|\nu_\alpha(x)\rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k} e^{-i(m_k^2/2E)x} |\nu_k(0)\rangle \quad (3.4)$$

Drückt man $|\nu_k(x=0)\rangle$ als Linearkombination der $|\nu_\alpha(x=0)\rangle$ aus, so ergibt sich

$$|\nu_\alpha(x)\rangle = \sum_{k,\beta} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k}^* e^{-i(m_k^2/2E)x} |\nu_\beta(0)\rangle \quad (3.5)$$

Mit $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, L)$ sei die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß ein Neutrino der Energie E , welches bei $x=0$ als ν_α erzeugt wurde, in einer Entfernung L von der Quelle als ν_β detektiert wird. Dann gilt unter Berücksichtigung der Unitarität von \mathbf{U} (die in Modellen mit See-Saw-Mechanismus bis auf Korrekturen der Ordnung M_Z/M_I gegeben ist):

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, L) = |\langle \nu_\beta(L) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = |\delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=2}^3 \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k}^* [e^{-i(\Delta m_{k1}^2/2E)L} - 1]|^2 \quad (3.6)$$

Hierbei ist $\Delta m_{k1}^2 \equiv m_k^2 - m_1^2$. Aus der CPT -Invarianz folgen ferner die Beziehungen

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, L) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha, L) \quad \text{und} \quad P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha, L) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha, L) \quad (3.7)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit für $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ hängt demnach von den Elementen von \mathbf{U} , von zwei unabhängigen Differenzen der Massenquadrate und vom Parameter L/E ab. Sie kann dann von Null verschieden sein, wenn $\mathbf{U} \neq \mathbf{1}$ ist und für mindestens ein k $\Delta m_{k1}^2 \gtrsim E/L$ gilt. Ist dies der Fall, so wird ein Neutrinostrahl, welcher bei $x=0$ nur aus ν_α besteht, an einem Ort $x=L$ auch Neutrinos der Art $\nu_{\beta \neq \alpha}$ beinhalten. Ein nur für den Nachweis von ν_α geeignetes Experiment wird dann ein Neutrinodefizit feststellen.

Die Bedeutung von (3.6) wird besonders klar, wenn man den Fall zweier Neutrino-Arten betrachtet. Dann besitzt \mathbf{U} die einfache Parametrisierung

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

(\mathbf{U} kann zwar CP -verletzende Phasen enthalten, die aber auf Neutrino-Oszillationen keinen Einfluß haben) und es gilt:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, L) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos(\Delta m^2 L/2E)) \quad (\alpha \neq \beta) \quad (3.9)$$

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha, L) = P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\beta, L) = 1 - P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, L) \quad (3.10)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit (3.9) ist eine periodische Funktion von L/E ; dieses Phänomen wird als Neutrino-Oszillation bezeichnet. Die Amplitude der Oszillation ist gleich $\sin^2 2\theta$, hängt also allgemein von den Einträgen von \mathbf{U} ab, und die Oszillationslänge ist durch $L^{\text{osc}} = 4\pi E/\Delta m^2$ gegeben. Oszillationseffekte können demnach beobachtet werden, sofern $L \gtrsim L^{\text{osc}}$ ist.

Bei der Datenanalyse von Oszillationsexperimenten wird im allgemeinen von nur zwei beteiligten Neutrino-Arten ausgegangen und (3.9-3.10) verwendet. Die graphische Auswertung erfolgt dann in $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ -Diagrammen, wobei die Nichtbeobachtung von Oszillationen abhängig von der Nachweisempfindlichkeit des Experiments bestimmte Bereiche des Parameterraums

ausschließt, während positive Resultate zu mehr oder weniger eng begrenzten erlaubten Parameterbereichen führen.

Oszillationsexperimente können lediglich Aussagen über die Größen $|\mathbf{U}|$ und Δm_{jk}^2 machen. Auf diese Weise lassen sich die Verhältnisse je zweier Neutrinomassen bestimmen, nicht aber die Massenwerte selbst.

3.1.2 Oszillationen in Materie

Wenn Neutrinos Materie durchqueren, kann der sogenannte Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein-Effekt (MSW-Effekt) [55, 56] auftreten, welcher das Oszillationsverhalten im Vergleich zum Vakuumfall modifiziert. Ursache des MSW-Effekts ist die Tatsache, daß in Materie für die Teilchendichten N_i der geladenen Leptonen $N_e \gg N_{\mu,\tau} \approx 0$ gilt. Während alle Neutrinos die gleiche Wechselwirkung über neutrale schwache Ströme erfahren, wechselwirken nur die Elektron-Neutrinos über geladene schwache Ströme mit der Materie. Das führt zu einer Flavour-Asymmetrie in der Vorwärts-Streuung von Neutrinos, die eine Phasenverschiebung zur Folge hat und sich somit auf die Zeitentwicklung des Gesamtsystems auswirkt [55].

Eine formale Analyse dieses Sachverhalts liefert für zwei Neutrino-Arten wieder die Beziehungen (3.9-3.10), wobei allerdings die Vakuumgrößen $\sin^2 2\theta$ und L^{osc} durch die neuen Größen

$$\sin^2 2\theta_M = \frac{\sin^2 2\theta}{(\cos 2\theta - L^{\text{osc}}/L_0)^2 + \sin^2 2\theta} \quad \text{und} \quad (3.11)$$

$$L_M^{\text{osc}} = \frac{L^{\text{osc}}}{\sqrt{(\cos 2\theta - L^{\text{osc}}/L_0)^2 + \sin^2 2\theta}} \quad (3.12)$$

mit $L_0 = 2\pi/(\sqrt{2} G_F N_e)$ ersetzt werden müssen. Daraus ergeben sich folgende Spezialfälle:

- $L^{\text{osc}} \ll L_0$ (geringe Elektronendichte):

$$\sin^2 2\theta_M \approx \sin^2 2\theta, \quad L_M^{\text{osc}} \approx L^{\text{osc}} \quad (3.13)$$

Die Materie-Effekte sind vernachlässigbar klein.

- $L^{\text{osc}} \gg L_0$ (hohe Elektronendichte):

$$\sin^2 2\theta_M \approx (L_0/L^{\text{osc}})^2 \sin^2 2\theta \approx 0, \quad L_M^{\text{osc}} \approx L_0 \quad (3.14)$$

Die Vakuumparameter sind stark unterdrückt; die Amplitude ist verschwindend klein und die Oszillationslänge ergibt sich unabhängig von L^{osc} .

- $L^{\text{osc}}/L_0 = \cos 2\theta$:

$$\sin^2 2\theta_M = 1, \quad L_M^{\text{osc}} = L^{\text{osc}}/\sin 2\theta \quad (3.15)$$

Die Oszillationsamplitude ist maximal, auch wenn der entsprechende Vakuumwert $\sin^2 2\theta$ sehr klein ist. Besitzt die Materieverteilung eine räumliche Ausdehnung der Größenordnung L_M^{osc} , so kann die Übergangswahrscheinlichkeit durchaus $\lesssim 1$ sein. Dieses Resonanzverhalten von (3.11) wird als MSW-Effekt bezeichnet [56].

Die Materie-Effekte auf das Oszillationsverhalten sind besonders für den Fall der im Inneren der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos von Bedeutung.

3.2 Experimentelle Situation

Die Neutrino-Oszillationsexperimente lassen sich grob in zwei Kategorien unterteilen. Die „Appearance“-Experimente untersuchen das Erscheinen von $\nu_{\beta \neq \alpha}$ in einem Neutrinostrahl, welcher bei seiner Entstehung ausschließlich aus ν_α -Neutrinos bestand, während „Disappearance“-Experimente nach einer Verringerung des ν_α -Flusses in einem solchen Strahl suchen. Weiterhin kann man die Experimente nach den Neutrinoquellen unterscheiden; es finden Neutrinos aus Beschleunigern, Kernreaktoren und natürlichen Quellen Verwendung. Ausführliche Referenzen zu den hier erwähnten Oszillationsexperimenten finden sich in [16]. Bis heute sind drei Indizien bekannt, die auf Neutrino-Oszillationen hindeuten.

3.2.1 Sonnen-Neutrinos

Struktur und Dynamik der Sonne werden durch das Standard-Sonnenmodell (SSM) [57] beschrieben und gelten als gut verstanden. Die Energie wird im Kern der Sonne über die thermonuklearen pp - und CNO-Reaktionsketten erzeugt; der zugrundeliegende Fusionsprozeß ist in beiden Fällen



Das Energiespektrum der Elektron-Neutrinos ist inhomogen und reicht je nach erzeugender Reaktion von 100 keV bis zu 15 MeV. Da die Unsicherheiten in den SSM-Vorhersagen über den Neutrinofluß relativ klein sind, eignet sich dieser gut für die Suche nach Oszillationen $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu, \tau}$. Alle bisher durchgeführten Messungen haben beträchtliche Differenzen zwischen tatsächlich gemessenen Ereignissen N_{Exp} und den aufgrund von Monte-Carlo-Simulationen erwarteten Ereignissen N_{SSM} festgestellt; die Resultate sind in Tabelle 3.1 dargestellt [16].

Experiment	Nachweisreaktion	Energiebereich (MeV)	$R = N_{\text{Exp}}/N_{\text{SSM}}$
Homestake	$\text{Cl}^{37}(\nu_e, e^-)\text{Ar}^{37}$	$E_\nu > 0.814$	0.33 ± 0.06
GALLEX	$\text{Ga}^{71}(\nu_e, e^-)\text{Ge}^{71}$	$E_\nu > 0.233$	0.60 ± 0.07
SAGE	$\text{Ga}^{71}(\nu_e, e^-)\text{Ge}^{71}$	$E_\nu > 0.233$	0.52 ± 0.07
Kamiokande	$\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$	$E_\nu > 7.5$	0.54 ± 0.07
Super-Kamiokande	$\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$	$E_\nu > 6.5$	0.47 ± 0.08

Tabelle 3.1: Sonnen-Neutrino-Experimente und deren Resultate für $R = N_{\text{Exp}}/N_{\text{SSM}}$

Homestake verwendet zum Nachweis 600 t C_2Cl_4 , GALLEX und SAGE bestehen aus 30 t Galliumchlorid beziehungsweise 60 t metallischem Gallium, Kamiokande und das

Nachfolge-Experiment Super-Kamiokande sind Wasser-Čerenkovdetektoren.

Die Analyse der Daten führt zu dem Ergebnis, daß sowohl Vakuumoszillationen auf dem Weg zwischen der Sonne und der Erde als auch der MSW-Effekt im Sonneninneren das Neutrinodefizit erklären können; es kommen $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ - und $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ -Übergänge in

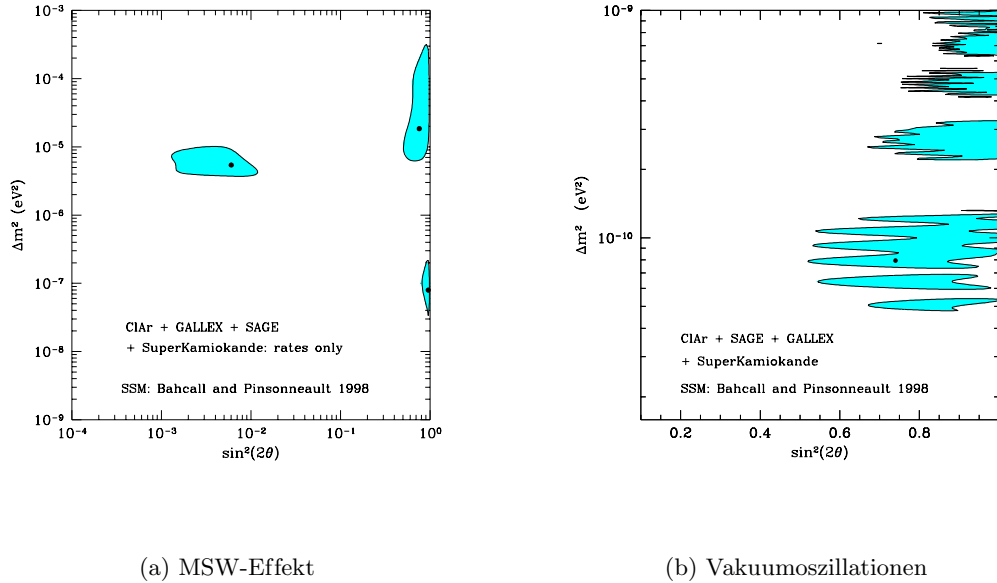


Abbildung 3.1: Erlaubte Bereiche der Oszillationsparameter für die Lösungen des Sonnen-Neutrino-Problems (99 % CL) [58]

Frage [58]. Die Abbildungen 3.1(a) und 3.1(b) geben die erlaubten Bereiche (mit einem Confidence Level (CL) von 99%) im $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ -Parameterraum an, wobei die Punkte den statistisch wahrscheinlichsten Lösungen entsprechen:

- eine MSW-Lösung mit großem Mischungswinkel bei $\sin^2 2\theta \approx 0.76$ und $\Delta m^2 \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$.
- eine MSW-Lösung mit kleinem Mischungswinkel bei $\sin^2 2\theta \approx 6 \cdot 10^{-3}$ und $\Delta m^2 \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$.
- eine MSW-Lösung mit kleinem Δm^2 bei $\sin^2 2\theta \approx 0.96$ und $\Delta m^2 \approx 8 \cdot 10^{-8} \text{ eV}^2$.
- eine Vakuumoszillations-Lösung bei $\sin^2 2\theta \approx 0.75$ und $\Delta m^2 \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ eV}^2$.

Die MSW-Lösung mit kleinem Δm^2 ist in ihrer Statistik wesentlich unwahrscheinlicher als die anderen, da sie für 95 % CL nicht mehr akzeptabel ist. Damit die Vakuumoszillations-Lösung das Neutrinodefizit erklären kann, ist eine nicht sehr natürlich wirkende Feineinstellung zwischen der Oszillationslänge und dem Sonne-Erde-Abstand erforderlich. Deswegen werden in dieser Arbeit nur die ersten beiden Lösungen in Betracht gezogen.

Weitere Experimente zur Untersuchung des Sonnen-Neutrino Defizits sind in Vorbereitung. Der Nachfolger von GALLEX ist das unterirdische Gallium Neutrino Observatory (GNO) im Gran Sasso-Labor (Italien) mit angestrebten 100 t Ga im Jahre 2002. Borexino ist ein organischer Flüssig-Szintillator mit einer Empfindlichkeit $E_\nu > 0.25$ MeV und wird ebenfalls in Gran Sasso untergebracht. Das Sudbury Neutrino Observatory (SNO) in Kanada wird ein Schwerwasser-Čerenkovdetektor aus 1000 t D₂O sein, welcher für $E_\nu > 5$ MeV sensibel ist.

3.2.2 Atmosphärische Neutrinos

Treffen hochenergetische Protonen der kosmischen Strahlung auf die obere Erdatmosphäre, so kollidieren sie mit den Kernen der Luftmoleküle. In diesen hadronischen Stoßprozessen entstehen zahlreiche Pionen und Kaonen, die gemäß

$$\begin{aligned} \pi^+, K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & \pi^-, K^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ &\hookrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu & &\hookrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned} \quad (3.17)$$

zerfallen; die dabei erzeugten Neutrinos bezeichnet man als atmosphärische Neutrinos. Wegen (3.17) erwartet man für das zahlenmäßige Verhältnis von Myon- zu Elektron-Neutrino-Ereignissen in einem Detektor in guter Näherung

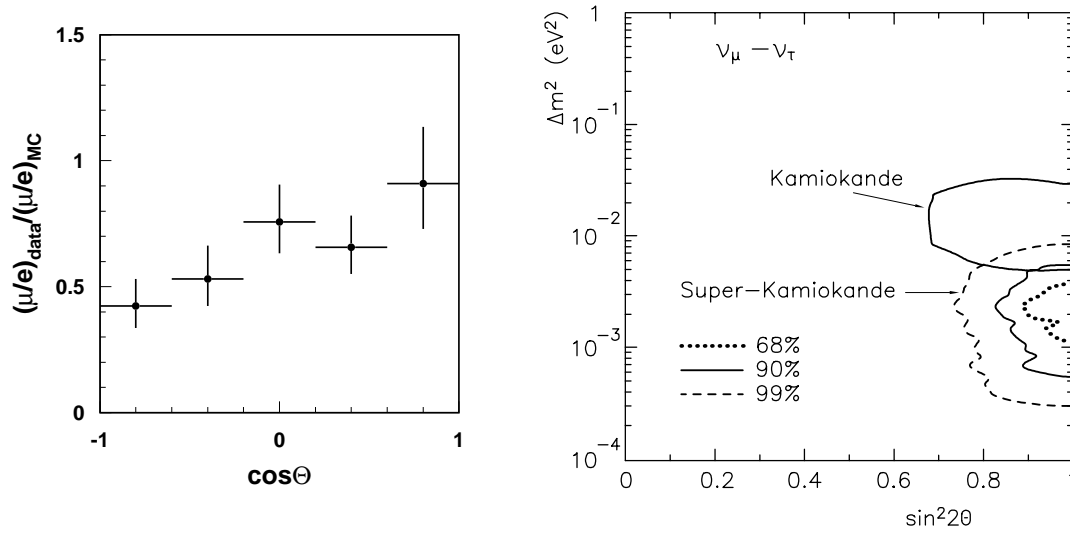
$$(\mu/e) \equiv \frac{N(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{N(\nu_e + \bar{\nu}_e)} = 2 \quad (3.18)$$

Obwohl der exakte Wert von (μ/e) von der Neutrino-Energie abhängt und von 2 abweichen kann, erlauben detaillierte Analysen mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen relativ präzise Vorhersagen. Diese bieten einen weiteren Ansatzpunkt für die Suche nach Neutrino-Oszillationen und wurden vom Kamiokande-Experiment und dem größeren Nachfolger Super-Kamiokande in Japan überprüft. Beides sind unterirdische Wasser-Čerenkovdetektoren; Kamiokande bestand aus 3 kt und Super-Kamiokande besteht aus 50 kt reinen Wassers in 1000 m Tiefe. Als Nachweisreaktionen dienen

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p, \quad \bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n, \quad \nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n \quad (3.19)$$

Experiment	Energiebereich	$R = (\mu/e)_{\text{data}}/(\mu/e)_{\text{MC}}$
Kamiokande	$E_\nu < 1.33$ GeV	$0.60 \pm \begin{smallmatrix} 0.06 \\ 0.05 \end{smallmatrix} \pm 0.05$
Kamiokande	$E_\nu > 1.33$ GeV	$0.57 \pm \begin{smallmatrix} 0.08 \\ 0.07 \end{smallmatrix} \pm 0.07$
Super-Kamiokande	$E_\nu < 1.33$ GeV	$0.63 \pm 0.03 \pm 0.05$
Super-Kamiokande	$E_\nu > 1.33$ GeV	$0.65 \pm 0.05 \pm 0.08$

Tabelle 3.2: Resultate von Kamiokande [59] und Super-Kamiokande [60] für $R = \frac{(\mu/e)_{\text{data}}}{(\mu/e)_{\text{MC}}}$



(a) Abhängigkeit des von Super-Kamiokande gemessenen (μ/e) -Defizits vom Zenit-Winkel θ

(b) Erlaubte Bereiche der Oszillationsparameter für Kamiokande und Super-Kamiokande

Abbildung 3.2: Anomalie der atmosphärischen Neutrinos und mögliche Lösungen durch $\nu_\mu - \nu_\tau$ -Oszillationen [59, 60]

Beide Experimente haben für das Verhältnis R von gemessenem $(\mu/e)_{\text{data}}$ zu theoretisch erwartetem $(\mu/e)_{\text{MC}}$ erhebliche Abweichungen vom Wert 1 festgestellt, die auf einem Defizit von $(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu)$ -Ereignissen beruhen. Tabelle 3.2 faßt die Resultate zusammen, wobei der erste Fehler von R statistischen und der zweite systematischen Ursprungs ist.

Eine mögliche Erklärung für diese Anomalie können $\nu_\mu - \nu_\tau$ -Oszillationen liefern. Die Oszillation in Elektron-Neutrinos ist aufgrund der Resultate des Reaktor-Experiments CHOOZ [61] ausgeschlossen, welches nach $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu,\tau}$ -Übergängen sucht, im Rahmen seines Meßbereichs ($E_\nu \sim 3$ MeV, $L = 1$ km) aber keine solchen gefunden hat.

Die Oszillationslösung wird durch die beobachtete Abhängigkeit des $(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu)$ -Defizits vom Zenit-Winkel θ (nicht zu verwechseln mit dem gleichnamigen Mischungswinkel) unterstützt (Abbildung 3.2(a)). Während die Neutrinos, welche den Detektor senkrecht von oben erreichen ($\theta = 0$), eine Strecke von $L \lesssim 20$ km zurückgelegt haben, müssen die den Detektor von unten erreichenden die gesamte Erde durchqueren, das heißt $L \approx 13000$ km für $\theta = \pi$. Je größer θ und somit auch L sind, desto mehr Myon-(Anti-)Neutrinos wandeln sich in Tau-(Anti-)Neutrinos um.

Abbildung 3.2(b) zeigt den erlaubten Parameterbereich für die Oszillationslösung; die wahrscheinlichste Lösung zur Erklärung der Super-Kamiokande-Resultate liegt bei $\sin^2 2\theta = 1.0$ und $\Delta m^2 = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$. Die Annahme eines hierarchischen Massenschemas

$m_1 \ll m_2 \ll m_3$ für die Neutrinos führt zu $m_3 \approx \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \sim 0.05$ eV, was bedeuten würde, daß Neutrinos zur dunklen Materie keinen nennenswerten Beitrag liefern.

Unter Berücksichtigung der $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Oszillationslösung für die Anomalie der atmosphärischen Neutrinos ist das Sonnen-Neutrino-Problem demnach auf $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ -Oszillationen zurückzuführen, da die erlaubten Parameterbereiche in den Abbildungen 3.1 und 3.2(b) sich in keinem Fall überlappen.

Zur Ergänzung von Super-Kamiokande, das weiterhin Daten aufnimmt, sind mehrere sogenannte „Long Baseline“-Experimente geplant. Hierbei sollen Neutrinostrahlen mit wohldefinierten Eigenschaften, die mittels Stoßprozessen an Teilchenbeschleunigern erzeugt werden, in einigen hundert km Entfernung detektiert werden. Erste Resulte sind jedoch nicht vor 2001 zu erwarten.

3.2.3 LSND und KARMEN

Das LSND-Beschleunigerexperiment in Los Alamos verwendet Neutrinos, die durch das Auftreffen eines relativistischen Protonenstrahls auf ein Wasser-Target entstehen. In den Stoßprozessen werden π^+ -Mesonen erzeugt, welche anschließend zerfallen; gemäß (3.17) enthält der resultierende Neutrinostrahl keine Elektron-Antineutrinos. Im 30 m entfernten Flüssig-Szintillationsdetektor werden allerdings Photonen nachgewiesen, welche aus der Reaktion $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ und nachfolgendem $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ beziehungsweise $n + p \rightarrow d + \gamma$ stammen. Eine mögliche Erklärung hierfür können $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen liefern. Der erlaubte Parameterbereich ist in Abbildung 3.3 dargestellt, wobei der dunkelgraue Bereich 90 % CL und der hellgraue 99 % CL kennzeichnet.

Eine Reihe von weiteren Reaktor- und Beschleunigerexperimenten haben $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen untersucht, aber im Rahmen ihrer Meßbereiche keine entsprechenden Ereignisse gefunden. Dies führt im Raum der Oszillationsparameter zu verbotenen Bereichen, welche sich in Abbildung 3.3 rechts von den verschiedenen Linien befinden (90 % CL). Insbesondere das KARMEN-Experiment und sein Nachfolger KARMEN 2 am Rutherford-Appleton-Laboratorium, welche im wesentlichen den gleichen Aufbau wie LSND haben (mit $L = 17.6$ m), schließen einen großen Teil des LSND-Bereichs aus. Der Grund für diese widersprüchlichen Resultate ist bis heute nicht bekannt. Allerdings wird das für 2001 am Fermilab in Planung befindliche Szintillator-Experiment MiniBooNE [63] aufgrund einer deutlich verbesserten Statistik den gesamten von LSND erlaubten Parameterbereich untersuchen und somit die Frage nach $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen abschließend beantworten können.

3.2.4 Analyse für drei Neutrino-Arten

In Tabelle 3.3 sind die Wertebereiche von Δm^2 zusammengefaßt, welche eine Oszillationslösung der jeweiligen Neutrino-Anomalie ermöglichen. Da sich die zulässigen Wertebereiche je zweier Δm^2 in keinem Fall überlappen und n verschiedene Neutrinomassen $n-1$ unabhängige Δm^2 liefern, können nur dann alle drei Anomalien durch Neutrino-Oszillationen erklärt

werden, wenn es vier leichte Neutrinos gibt. Es sind verschiedene Modelle mit einem

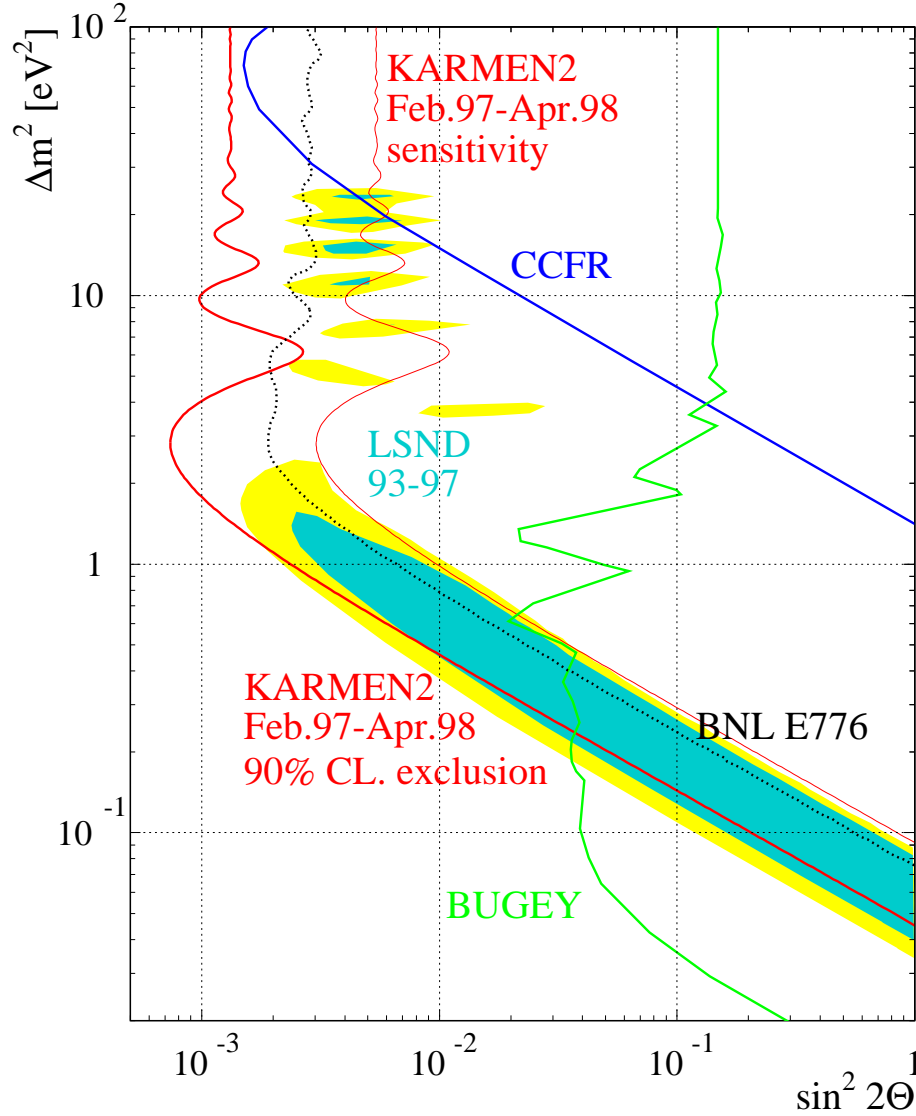


Abbildung 3.3: Erlaubte Bereiche der Oszillationsparameter für die Erklärung der LSND-Resultate und die durch KARMEN und weitere Experimente ausgeschlossenen Parameterbereiche [62]

vierten, im Rahmen des SM nicht wechselwirkenden, Neutrino ν_s untersucht worden (Referenzen in [16]); da aber die Resultate von LSND und KARMEN bisher widersprüchlich sind, wird in der vorliegenden Arbeit die LSND-Anomalie nicht weiter berücksichtigt und von drei leichten Neutrinos ausgegangen. Analysiert man alle Daten aus den Oszillationslösungen der übrigen beiden Neutrinodefizite und aus den Experimenten, welche keine Hinweise auf Oszillationen liefern, unter der Annahme dreier miteinander mischender leichter Neutrinos, so erhält man je nach Erklärung der Sonnen-Neutrino-Anomalie folgende erlaubten Bereiche

Neutrino-Anomalie	Δm^2 (eV ²)	Oszillation
Atmosphärische Neutrinos	$(0.4 - 8.0) \cdot 10^{-3}$	$\nu_\mu \longleftrightarrow \nu_\tau$
Sonnen-Neutrinos (MSW-Effekt)	$(0.4 - 3.0) \cdot 10^{-5}$	$\nu_e \longleftrightarrow \nu_{\mu,s}$
Sonnen-Neutrinos (Vakuum-Osz.)	$(0.6 - 1.1) \cdot 10^{-10}$	$\nu_e \longleftrightarrow \nu_{\mu,s}$
LSND	$0.2 - 10$	$\nu_\mu \longleftrightarrow \nu_e$

Tabelle 3.3: Neutrino-Anomalien und erlaubte Δm^2 -Bereiche aus den Oszillations-Analysen

für die Massen und Mischungen [16]:

MSW-Effekt (kleiner Winkel):

$$0.4 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (3.20)$$

$$0.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 \lesssim 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (3.21)$$

$$33 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 / \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 2000 \quad (3.22)$$

$$|\mathbf{U}| = \begin{pmatrix} \approx 1 & 0.03 - 0.05 & \ll 1 \\ 0.02 - 0.05 & 0.71 - 0.87 & 0.49 - 0.71 \\ 0.01 - 0.04 & 0.48 - 0.71 & 0.71 - 0.87 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

MSW-Effekt (großer Winkel):

$$0.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (3.24)$$

$$0.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 \lesssim 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (3.25)$$

$$13 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 / \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 1000 \quad (3.26)$$

$$|\mathbf{U}| = \begin{pmatrix} 0.87 - 0.94 & 0.35 - 0.49 & \ll 1 \\ 0.25 - 0.43 & 0.61 - 0.82 & 0.49 - 0.71 \\ 0.17 - 0.35 & 0.42 - 0.66 & 0.71 - 0.87 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Vakuumoszillationen:

$$0.6 \cdot 10^{-10} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 1.1 \cdot 10^{-10} \text{ eV}^2 \quad (3.28)$$

$$0.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 \lesssim 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (3.29)$$

$$3 \cdot 10^6 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 / \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 10^8 \quad (3.30)$$

$$|\mathbf{U}| = \begin{pmatrix} 0.71 - 0.88 & 0.48 - 0.71 & \ll 1 \\ 0.34 - 0.61 & 0.50 - 0.76 & 0.51 - 0.71 \\ 0.24 - 0.50 & 0.36 - 0.62 & 0.71 - 0.86 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Ein realistisches Massenmodell für die Fermionen muß demnach auf Neutrino-Eigenschaften führen, welche mit einem der drei obigen Fälle innerhalb der Grenzen konsistent sind.

Kapitel 4

Das $SO(10)$ -Massenmodell

4.1 Bestimmung der Symmetriebrechungsskalen

Gegenstand dieser Arbeit ist die detaillierte Analyse eines Modellansatzes für die fermionischen Massenmatrizen im Rahmen einer nichtsupersymmetrischen $SO(10)$ -GUT mit dem Brechungsschema

$$SO(10) \xrightarrow{M_U} G_I \xrightarrow{M_I} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (4.1)$$

Als intermediäre Symmetriegruppe G_I sollen zunächst sowohl G_{PS} als auch $G_{\text{PS}} \otimes D$ in Frage kommen. Deren Vorteil gegenüber Symmetriegruppen, welche $SU(3)_C \otimes U(1)_{B-L}$ enthalten, besteht in der Vereinheitlichung von Quarks und Leptonen bereits bei der Skala M_I . Das hat unter anderem zur Folge, daß die $SO(10)$ -Relationen (2.35-2.40) zwischen den verschiedenen Massenmatrizen nicht nur oberhalb von M_U , sondern auch im Energiebereich zwischen M_I und M_U gelten. Ferner resultiert aus dem links-rechts-symmetrischen Fermionspektrum (2.24) auf natürliche Weise die Existenz rechtshändiger Neutrinos.

Gemäß Tabelle 2.2 wird die Symmetriebrechung bei M_U durch eine **210** beziehungsweise **54** realisiert; die Brechung bei M_I erfolgt in beiden Fällen durch das SM-Singulett einer $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})_{126}$. Bezüglich der Massen der Higgs-Teilchen wird von der Gültigkeit der „Extended Survival Hypothesis“ [39] ausgegangen, das heißt nur diejenigen Komponenten von $SO(10)$ -Higgs-Darstellungen besitzen Massen $m \ll M_U$, welche für die Symmetriebrechungen bei M_I und M_Z sowie für die Erzeugung der Fermionmassen erforderlich sind. Higgs-Teilchen mit Massen der Größenordnung M_I können demnach in folgenden Darstellungen liegen:

- in der $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})_{126}$, da sie die Symmetriebrechung bei M_I realisiert.
- in $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10/120}$ und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126}$, da diese für die Massenerzeugung der Fermionen in Frage kommen.
- in Modellen mit $G_{\text{PS}} \otimes D$ -Symmetrie in der $(\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})_{126}$, welche aufgrund der D -Parität das Gegenstück zur $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})_{126}$ bildet (siehe Abschnitt 2.3.2).

Wie bereits in Abschnitt 2.3.3 erläutert wurde, ist das SM-Higgs-Doublett eine Linearkombination der $SU(2)_L$ -Doubletts in den $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ - und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ -Darstellungen.

Um ein realistisches $SO(10)$ -Massenmodell konstruieren zu können, ist wegen (2.41) ein Higgs-Spektrum erforderlich, welches über den einfachsten Fall einer komplexen $\mathbf{10}$ hinausgeht. Während im Bereich unterhalb von M_I der Teilcheninhalt stets der des SM mit einem Higgs-Doublett sein soll, ist die Anzahl der für die Erzeugung der Fermionmassen relevanten G_{PS} -Higgs-Darstellungen $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10/120}$ und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126}$ mit Massen $\sim M_I$ zunächst nicht weiter festgelegt und kann an die konkreten Anforderungen des Modells angepaßt werden. Der Umfang des Teilchenspektrums bei M_I hat allerdings direkte Auswirkungen auf die Skalenabhängigkeit der $G_{\text{PS}}[\otimes D]$ -Eichkopplungen, wie man an den Renormierungsgruppengleichungen (B.21-B.23) erkennt. Bedeutsam wird dieser Einfluß, wenn man die phänomenologischen Eigenschaften des Massenmodells wie zum Beispiel die Zerfallsraten der Nukleonen berechnen will. Dazu müssen nämlich die Werte der Symmetriebrechungsskalen $M_{U,I}$ und die der verschiedenen Eichkopplungen bei diesen Skalen bekannt sein, und um diese quantitativ bestimmen zu können, ist eine numerische Integration der Renormierungsgruppengleichungen für die Kopplungen sowohl des SM (B.7-B.9) als auch des $G_{\text{PS}}[\otimes D]$ -Modells (B.21-B.23) erforderlich.

Im folgenden werden zunächst $M_{U,I}$ und die Kopplungswerte für beide intermediären Symmetriegruppen in Abhängigkeit vom Higgs-Spektrum numerisch bestimmt, wobei das verwendete Verfahren dem in [42] entspricht. Dort ist der minimale Fall mit einer $\mathbf{10}$ untersucht worden; in [39] wurde der Einfluß des Higgs-Spektrums auf die β -Funktionen der G_I -Kopplungen analysiert, ohne jedoch die Renormierungsgruppengleichungen numerisch zu lösen.

4.1.1 $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Modell

Die Parameter $\Delta_{R,L}$ in (B.21-B.23) haben hier die festen Werte $\Delta_R = 1$ und $\Delta_L = 0$, die Werte von N_1 und N_{15} können frei vorgegeben werden. Unter Berücksichtigung des Prinzips, daß die Anzahl der Higgs-Teilchen bei gegebenem Massenmodell grundsätzlich so klein wie möglich gewählt werden soll, erscheint eine Untersuchung der Fälle $N_1 = 1, \dots, 5$ und $N_{15} = 1, 2, 3$ sinnvoll. Die Vorgehensweise sieht dann wie folgt aus:

- Für M_I wird ein Wert vorgegeben, der sinnvollerweise zwischen M_Z und $M_{\text{Planck}} \approx 10^{19}$ GeV liegen kann.
- Ausgehend von den bekannten Werten der SM-Eichkopplungen bei M_Z (siehe Tabelle C.1) werden die Renormierungsgruppengleichungen (B.7-B.9) unter Vernachlässigung der Yukawabeiträge von M_Z bis M_I integriert.
- Aus den nun bekannten SM-Kopplungen bei M_I werden die Kopplungen des G_{PS} -

Modells bei dieser Skala berechnet. Die Anschlußbedingungen lauten

$$\alpha_{4C}^{-1}(M_I) = \alpha_3^{-1}(M_I) + \frac{1}{12\pi} \quad (4.2)$$

$$\alpha_{2L}^{-1}(M_I) = \alpha_2^{-1}(M_I) \quad (4.3)$$

$$\alpha_{2R}^{-1}(M_I) = \frac{5}{3} \alpha_1^{-1}(M_I) - \frac{2}{3} \alpha_3^{-1}(M_I) + \frac{1}{3\pi} \quad (4.4)$$

Die Faktoren $5/3$ und $2/3$ in (4.4) stammen aus der korrekten Normierung der G_{PS} -Generatoren im Rahmen der übergeordneten $SO(10)$ [21], während die Korrekturen $1/(12\pi)$ und $1/(3\pi)$ auf Schwelleneffekte zurückzuführen sind [64]. Diese Effekte modifizieren die „naiven“ Anschlußbedingungen in der zweiten Ordnung der Störungsrechnung. Vernachlässigt man logarithmische Korrekturen $\sim \ln(m_i/M_{I,U})$, wobei m_i für die in der Regel nicht exakt bekannten Massen aller Teilchen steht, welche ihre Massen durch die Symmetriebrechung bei $M_{I,U}$ erhalten, können die Anschlußbedingungen allgemein als

$$\alpha_j^{-1}(M_{I/U}) - \frac{1}{12\pi} S_2(\mathcal{G}_j) = \alpha_k^{-1}(M_{I/U}) - \frac{1}{12\pi} S_2(\mathcal{G}_k) \quad (4.5)$$

geschrieben werden [42]. $S_2(\mathcal{G}_j)$ bezeichnet hier den Dynkin-Index der adjungierten Darstellung der Eichgruppe G_j (siehe Anhang A). In Abschnitt 4.2 werden die Ursachen von Schwellenkorrekturen und ihr Einfluß auf die Bestimmung der Symmetriebrechungsskalen ausführlich diskutiert.

- Ausgehend von den G_{PS} -Kopplungen bei M_I integriert man die Renormierungsgruppengleichungen (B.21-B.23) von M_I zu höheren Energien und überprüft, ob eine Skala $\mu \equiv M_U > M_I$ existiert, bei welcher sich die drei Kopplungen unter Berücksichtigung der ebenfalls durch Schwelleneffekte modifizierten Anschlußbedingungen

$$\alpha_U^{-1}(M_U) = \alpha_{4C}^{-1}(M_U) + \frac{1}{3\pi} \quad (4.6)$$

$$= \alpha_{2L}^{-1}(M_U) + \frac{1}{2\pi} \quad (4.7)$$

$$= \alpha_{2R}^{-1}(M_U) + \frac{1}{2\pi} \quad (4.8)$$

in einem Punkt treffen. Ist das der Fall, so sind die Brechungsskalen M_I und M_U sowie die Werte der verschiedenen Kopplungskonstanten bei $M_{I,U}$ bekannt.

Auf diese Weise ist für jedes der in Frage kommenden Higgs-Spektren der gesamte erlaubte Parameterbereich für M_I zu untersuchen; dabei besteht durchaus die Möglichkeit, daß keine Vereinheitlichung erreicht werden kann.

Die Ergebnisse sind in Anhang C.2 zusammengefaßt. Man erkennt zunächst, daß für $N_{15} = 3$ und $N_1 = 1, \dots, 5$ sowie $N_{15} = 2$ und $N_1 = 1, 2, 3$ keine Vereinheitlichung stattfindet. In den übrigen untersuchten Fällen sind folgende Eigenschaften erkennbar:

- Bei festem N_{15} sind M_U und α_U umso kleiner und M_I umso größer, je größer N_1 ist.

- Bei festem N_1 sind M_U und α_U umso größer und M_I umso kleiner, je größer N_{15} ist.

Eine qualitative Abschätzung der Protonlebensdauer gemäß (2.9) führt unter Berücksichtigung der experimentellen Grenzen mit $\alpha_U \approx 1/35 \dots 1/20$ zu der Einschränkung $M_U \gtrsim 3 \cdot 10^{15}$ GeV für die Vereinheitlichungsskala. Deswegen sind die Modelle mit $(N_1, N_{15}) = (4, 1)$ und $(5, 1)$ wegen ihrer relativ kleinen Werte von M_U im Vergleich zu den übrigen vom phänomenologischen Standpunkt her eher ungeeignet.

4.1.2 $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$ -Modell

Die Parameter $\Delta_{R,L}$ haben in diesem Fall wegen des zwangsläufig links-rechts-symmetrischen Teilcheninhalts beide den Wert 1. Im Vergleich zum G_{PS} -Modell ergibt sich hier ein wesentlicher Unterschied in der Vorgehensweise, der auf den Anschlußbedingungen bei M_I beruht. Zusätzlich zu (4.2-4.4) gilt in Modellen mit D -Parität nämlich $\alpha_{2L}(\mu) = \alpha_{2R}(\mu)$ für alle μ mit $M_I \leq \mu \leq M_U$. Das führt auf

$$\alpha_{4C}^{-1}(M_I) = \alpha_3^{-1}(M_I) + \frac{1}{12\pi} \quad (4.9)$$

$$\alpha_{2L}^{-1}(M_I) = \alpha_2^{-1}(M_I) = \alpha_{2R}^{-1}(M_I) \quad (4.10)$$

$$0 = \alpha_2^{-1}(M_I) - \frac{5}{3}\alpha_1^{-1}(M_I) + \frac{2}{3}\alpha_3^{-1}(M_I) - \frac{1}{3\pi} \quad (4.11)$$

Die letzte Gleichung liefert eine Einschränkung für die SM-Kopplungen, welche bei genau einer Skala M_I erfüllt ist. In [65] ist gezeigt worden, daß dieser Wert für M_I von den physikalischen Eigenschaften des Modells bei Skalen $\mu > M_I$ völlig unabhängig ist; insbesondere hat das Higgs-Spektrum keinen Einfluß auf M_I und die Kopplungskonstanten bei $\mu = M_I$. In Tabelle C.2 sind die Werte dieser Größen angegeben. Es fällt auf, daß der Wert von M_I um etwa zwei bis drei Größenordnungen über den entsprechenden Werten im G_{PS} -Modell liegt.

Das Problem reduziert sich also auf die Bestimmung von M_U und α_U in Abhängigkeit vom Teilcheninhalt. Von den zwei bekannten Kopplungen bei M_I ausgehend werden (B.21-B.22) bis zu der Skala $\mu \equiv M_U$ integriert, bei welcher α_{4C} und α_{2L} die Bedingungen

$$\alpha_U^{-1}(M_U) = \alpha_{4C}^{-1}(M_U) + \frac{1}{3\pi} \quad (4.12)$$

$$= \alpha_{2L}^{-1}(M_U) + \frac{1}{2\pi} \quad (4.13)$$

erfüllen. Die Resultate sind in Tabelle C.3 zusammengefaßt, es sind folgende Tendenzen in den Lösungen erkennbar:

- Bei festem N_{15} sind M_U und α_U umso kleiner, je größer N_1 ist.
- Bei festem N_1 sind M_U und α_U umso größer, je größer N_{15} ist.

Für alle untersuchten Fälle findet eine Vereinheitlichung der Kopplungen statt, allerdings bei vergleichsweise kleinen M_U -Werten von $\approx (1-2) \cdot 10^{15}$ GeV. Das führt zu Vorhersagen

für die Lebensdauern der Nukleonen, die den experimentellen Grenzen widersprechen, weshalb $G_{\text{PS}} \otimes D$ als intermediäre Symmetriegruppe ausscheidet. Im folgenden ist $G_I = G_{\text{PS}}$; der Higgs-Inhalt des Modells wird später aus den Anforderungen des Ansatzes für die Massenmatrizen unter Berücksichtigung der Resultate in Abschnitt 4.1.1 bestimmt.

4.2 Schwellenkorrekturen

In diesem Abschnitt wird auf den Ursprung der Schwellenkorrekturen und deren Effekte auf die Bestimmung von Symmetriebrechungsskalen eingegangen.

Wird eine auf der Gruppe G_J beruhende Eichsymmetrie bei einer Skala M spontan in die zur Untergruppe G_j gehörige Symmetrie gebrochen, ist damit formal der Übergang von der vollen Eichtheorie zu einer bei Energien $\mu < M$ gültigen effektiven Theorie verbunden [66]. Diese effektive Niederenergie-Näherung erhält man durch Ausintegration der schweren Freiheitsgrade aus dem Wirkungsfunktional. Wenn Φ die Felder bezeichnet, die zu Teilchen mit Massen der Größenordnung M gehören, und ϕ für die auch unterhalb von M masselosen Felder steht, erhält man die Wirkung $S_j[\phi]$ der effektiven Theorie aus der ursprünglichen Wirkung $S_J[\phi, \Phi]$ durch Funktionalintegration über die schweren Felder:

$$\exp(i S_j[\phi]) = \int [d\Phi] \exp(i S_J[\phi, \Phi]) \quad (4.14)$$

Hierbei ist die Invarianz von $S_j[\phi]$ unter G_j -Transformationen zu fordern. Um die Integration in (4.14) ausführen zu können, muß in der Wirkung $S_J[\phi, \Phi]$ ein Eichfixierungsterm $f_J(\phi, \Phi)$ eingeführt werden. Nach der Ausintegration der schweren Felder verbleibt von $f_J(\phi, \Phi)$ jedoch ein Rest, der die G_j -Eichinvarianz der neuen Wirkung $S_j[\phi]$ verletzt. Dieses Problem kann durch eine Redefinition der Kopplungskonstanten und der Eichfelder in S_j behoben werden. Als Konsequenz ändert sich die naive Anschlußbedingung $\alpha_j(M) = \alpha_J(M)$ in

$$\alpha_j^{-1}(M) = \alpha_J^{-1}(M) - \lambda_j(M), \quad (4.15)$$

wobei $\lambda_j(M)$ in erster Ordnung der Störungsrechnung durch

$$\begin{aligned} \lambda_j(M) = & \frac{1}{12\pi} \left(S_2(\mathcal{R}_j^{(G)}) - 21 S_2(\mathcal{R}_j^{(G)}) \cdot \ln(m_G/M) \right. \\ & \left. + \Lambda \sum_S S_2(\mathcal{R}_j^{(S)}) \cdot \ln(m_S/M) + 8 \sum_F S_2(\mathcal{R}_j^{(F)}) \cdot \ln(m_F/M) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

gegeben ist [64]. Hierbei ist $\mathcal{R}_j^{(G)}$ die Darstellung von G_j , nach welcher die im Rahmen der Symmetriebrechung massiv gewordenen Eichbosonen von G_J transformieren. Weiterhin steht $\mathcal{R}_j^{(F,S)}$ für die \mathcal{G}_j -Darstellungen, in denen die Fermionen beziehungsweise Higgs-Teilchen mit Massen $m_{F,S} \sim M$ liegen; S_2 ist der Dynkin-Index dieser Darstellungen (siehe Tabelle A.1). Der Operator Λ projiziert die Goldstone-Bosonen aus dem Higgs-Spektrum heraus. $\lambda_j(M)$ hat seinen physikalischen Ursprung in den Strahlungskorrekturen zum Propagator der Eichbosonen der effektiven Theorie durch die schweren Teilchen.

In der Analyse des letzten Abschnitts wurde bei den Anschlußbedingungen lediglich der erste, nicht von den Massen abhängige, Term von λ_j in abgewandelter Form benutzt. Das entspricht der üblicherweise gemachten Annahme, daß die durch Symmetriebrechung bei einer Skala M erzeugten Teilchenmassen sich nur minimal von M unterscheiden und die logarithmischen Terme vernachlässigt werden können.

Hier soll nun der Einfluß der zu den Skalaren gehörigen logarithmischen Terme auf die Bestimmung der Werte der Symmetriebrechungsskalen M_I und M_U untersucht werden, wenn man für die Argumente der Logarithmen einen Wertebereich von 0.1 bis 10 zuläßt. Das ist angesichts der Komplexität des Higgs-Potentials in Modellen mit nichtminimalem Higgs-Inhalt und der damit verbundenen großen Anzahl unbekannter Koeffizienten der Größenordnung 1 durchaus plausibel. Das Verfahren lehnt sich an [67] an, wo dies für $SO(10)$ -Modelle mit minimalem Higgs-Inhalt durchgeführt wurde. Beiträge durch Fermionen gibt es bei $M_{U,I}$ nicht, da die rechtshändigen Neutrinos als einzige schwere Teilchen SM-Singulets sind. Die Eichbosonbeiträge werden vernachlässigt, da der Higgs-Inhalt der Theorie deutlich umfangreicher als der Eichboson-Inhalt ist.

Die für die Berechnung der λ_j -Koeffizienten erforderlichen Dynkin-Indizes der einzelnen Higgs-Darstellungen sind in Tabelle A.1 angegeben. Mit ihrer Hilfe lassen sich die $\lambda_j^{I,U}$ für das hier diskutierte Modell bestimmen; Anhang A.4 enthält alle relevanten Resultate. Der Einfluß der Schwellenkorrekturen auf die Vorhersagen von $M_{U,I}$ wird durch folgende Beziehungen beschrieben [65]:

$$\Delta \ln(M_U/M_Z) = \frac{K_\lambda A_I - J_\lambda B_I}{A_U B_I - A_I B_U} \quad (4.17)$$

$$\Delta \ln(M_I/M_Z) = \frac{J_\lambda B_U - K_\lambda A_U}{A_U B_I - A_I B_U} \quad (4.18)$$

Die Größen $A_{I,U}$ und $B_{I,U}$ sind Linearkombinationen der führenden Koeffizienten der Eichkopplungs- β -Funktionen

$$A_U = 2\beta_{4C} - \beta_{2L} - \beta_{2R} \quad (4.19)$$

$$B_U = -\frac{2}{3}\beta_{4C} + \frac{5}{3}\beta_{2L} - \beta_{2R} \quad (4.20)$$

$$A_I = \frac{8}{3}\beta_3 - \beta_2 - \frac{5}{3}\beta_1 - A_U \quad (4.21)$$

$$B_I = \frac{5}{3}(\beta_2 - \beta_1) - B_U \quad (4.22)$$

und können Anhang B entnommen werden, J_λ und K_λ sind als

$$J_\lambda = 2\pi \left(-2\lambda_{4C}^U + \lambda_{2L}^U + \lambda_{2R}^U - \frac{8}{3}\lambda_{3C}^I + \lambda_{2L}^I + \frac{5}{3}\lambda_{1Y}^I \right) \quad (4.23)$$

$$K_\lambda = 2\pi \left(\frac{2}{3}\lambda_{4C}^U - \frac{5}{3}\lambda_{2L}^U + \lambda_{2R}^U - \frac{5}{3}\lambda_{2L}^I + \frac{5}{3}\lambda_{1Y}^I \right) \quad (4.24)$$

definiert. Dabei ist $\lambda_j^{I,U}$ als Summe der Beiträge der einzelnen Higgs-Darstellungen zu verstehen.

Um daraus quantitative Resultate zu erhalten, sei an dieser Stelle das Higgs-Spektrum des noch zu konstruierenden Massenmodells vorweggenommen. Es wird sich abgesehen von $\Delta_R = 1$ und $\Delta_L = 0$ zu $(N_1, N_{15}) = (4, 2)$ ergeben, woraus sich für die durch Schwelleneffekte verursachten Unsicherheiten in den Vorhersagen für $M_{U,I}$

$$\begin{aligned} \Delta \ln(M_U/M_Z) &= -\frac{42}{215} \eta_{(1,2,2)} + \frac{24}{215} \eta_{(15,2,2)} + \frac{141}{430} \eta_{(10,1,3)} \\ &\quad + \frac{12}{215} \eta_{210} - \frac{17}{43} \eta_{126} + \frac{12}{215} \eta_{120} + \frac{24}{215} \eta_{10} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ln(M_I/M_Z) &= \frac{7}{43} \eta_{(1,2,2)} - \frac{4}{43} \eta_{(15,2,2)} - \frac{44}{43} \eta_{(10,1,3)} \\ &\quad - \frac{2}{43} \eta_{210} + \frac{50}{43} \eta_{126} - \frac{2}{43} \eta_{120} - \frac{4}{43} \eta_{10} \end{aligned} \quad (4.26)$$

ergibt. $\eta_{\mathcal{R}}$ steht für $\ln(m_{\mathcal{R}}/M_U)$ ($\mathcal{R} = \mathbf{10}, \mathbf{120}, \mathbf{126}, \mathbf{210}$) beziehungsweise $\ln(m_{\mathcal{R}}/M_I)$ ($\mathcal{R} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$), wobei vereinfachend davon ausgegangen wird, daß alle Teilchen in einer Darstellung \mathcal{R} , welche ihre Massen durch den Symmetriebrechungsschritt bei $M_{U,I}$ erhalten, dieselbe Masse haben. Läßt man nun, wie oben angekündigt, für die $\eta_{\mathcal{R}}$ Werte zwischen $\ln(0.1)$ und $\ln(10)$ zu, erhält man folgende Maximalbeträge für $\Delta \ln(M_{U,I}/M_Z)$:

$$|\Delta \ln(M_U/M_Z)|_{\max} = \frac{539}{430} \cdot \ln(10) = 2.89 \quad (4.27)$$

$$|\Delta \ln(M_I/M_Z)|_{\max} = \frac{113}{43} \cdot \ln(10) = 6.05 \quad (4.28)$$

Demnach können die Schwellenkorrekturen im vorliegenden Fall aufgrund ihres Einflusses auf die Anschlußbedingungen gemäß (4.15) den Wert von M_U um einen Faktor $\lesssim 10^{\pm 1.25}$ und den von M_I um einen Faktor $\lesssim 10^{\pm 2.63}$ modifizieren.

Obwohl hier lediglich eine Abschätzung des Maximaleffekts durchgeführt wurde, sollte bei den Angaben über die Werte von Symmetriebrechungsskalen der mögliche Einfluß der unbekannten Higgs-Massen nicht vergessen werden.

4.3 Der Ansatz für die Massenmatrizen

Im Rahmen des SM ist die Form der fermionischen Massenmatrizen in keiner Weise eingeschränkt. Es besteht aber allgemein die Überzeugung, daß eine fundamentalere Theorie als das SM existiert, welche auch den Fermionsektor einschließlich der Struktur der Massenmatrizen erklären kann. In Ermangelung einer solchen Theorie ist bis heute eine Vielzahl von phänomenologisch motivierten Ansätzen für die Massenmatrizen vorgeschlagen worden. Sie zeichnen sich durch bestimmte Symmetrieeigenschaften wie zum Beispiel Hermitezität und sogenannte Texturen, das heißt Nullen als Matrixeinträge an bestimmten Stellen, aus. Der Grundgedanke besteht darin, die Anzahl der freien Parameter in den Matrizen kleiner als die Zahl der zu reproduzierenden observablen Massen und Mischungen zu machen, um Vorhersagen über Beziehungen zwischen diesen Größen zu erhalten und somit möglicherweise etwas über die Eigenschaften der zugrundeliegenden Theorie zu erfahren.

Der wohl populärste dieser Ansätze geht auf Fritzsch zurück [68] und basiert auf zwei Annahmen: Die Quark-Massenmatrizen sind hermitesch und haben die „Nearest Neighbour Interaction“ (NNI)-Form. Letzteres bedeutet, daß nur das schwerste Fermion einer Art seine Masse direkt über die Yukawakopplung erhält; die Massen der leichten Teilchen kommen durch Wechselwirkungen respektive Mischungen mit ihren nächsten Nachbarn in der Massenmatrix zustande. Für zwei und drei Generationen haben die Matrizen demnach folgende Gestalt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & B \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^* & 0 & B \\ 0 & B^* & C \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Wendet man den Fritzsch-Ansatz auf die Quark-Massenmatrizen im Falle zweier Generationen an, erhält man für den Cabibbo-Winkel die mit $\phi \sim \pi/2$ sehr gute Vorhersage

$$\theta_C \approx |\sqrt{m_d/m_s} - e^{i\phi}\sqrt{m_u/m_c}| \quad (4.30)$$

Ferner läßt sich mit $|A| \ll |B|$ auch die Massenhierarchie erklären.

Problematisch ist der Ansatz jedoch für drei Fermionengenerationen, da es keine Lösungen gibt, welche gleichzeitig die große t -Quarkmasse und den kleinen Wert für das CKM-Matrixelement V_{cb} realisieren können [69]. Daran ändert sich auch nichts, wenn man den Fritzsch-Ansatz in eine $SO(10)$ -GUT ohne [70] oder mit Supersymmetrie [71] einbettet.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, könnte darin bestehen, hermitesche Massenmatrizen mit einer anderen Struktur als (4.29) zu verwenden. In [72] ist eine systematische Analyse aller Kombinationen von hermiteschen Quark-Massenmatrizen mit insgesamt ≥ 5 unabhängigen Null-Einträgen durchgeführt worden, aber auch dort sind keine wirklich überzeugenden Lösungen gefunden worden.

Es deutet also einiges darauf hin, daß ein phänomenologisch erfolgreiches Massenmodell nichthermitesche Matrizen enthalten muß. Hier hat sich das Interesse auf supersymmetrische GUTs konzentriert, wobei zur Massenerzeugung häufig von nichtrenormierbaren Operatoren Gebrauch gemacht wird, welche aus einer noch fundamentaleren Theorie stammen sollen; [73] bietet einen Überblick über solche Ansätze in SUSY-GUTs.

Modelle mit nichthermiteschen Massenmatrizen, welche die NNI-Form besitzen, haben im Rahmen supersymmetrischer $SU(5)$ - [74] und $SO(10)$ -Theorien [75] vergleichsweise gute Resultate auch im Neutrinosektor geliefert. Daß ein solcher Ansatz auch in einem $SO(10)$ -Modell ohne Supersymmetrie erfolgreich sein kann, wird in dieser Arbeit gezeigt werden. Ein früherer Versuch in dieser Richtung war aufgrund der zu einfachen Struktur des verwendeten Higgs-Spektrums (eine **10** und eine **120**) gescheitert [76].

Ein weiteres Argument zugunsten nichthermitescher NNI-Matrizen liefert [77]. Dort ist gezeigt worden, daß ein NNI-Ansatz für die Quark-Massenmatrizen im SM keine physikalischen Konsequenzen beinhaltet, sofern die Zahl der Fermionengenerationen nicht größer als vier ist. Im SM kann man beide Matrizen unabhängig von deren Ausgangsgestalt

durch Transformationen auf NNI-Form bringen, ohne daß sich observable Größen ändern. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß von den vier Mischungsmatrizen im Quarksektor $\mathbf{U}_{L,R}$ und $\mathbf{D}_{L,R}$ aus (1.29) nur die Kombination $\mathbf{V} \equiv \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L$ physikalisch relevant ist; insbesondere die rechtshändigen Mischungen sind experimentell nicht beobachtbar. Es handelt sich beim NNI-Ansatz im SM also streng genommen nicht um einen Ansatz, sondern um eine spezielle Wahl der Basis im Raum der schwachen Eigenzustände. Wird der NNI-Ansatz jedoch in Theorien jenseits des SM eingebettet, ergeben sich daraus direkte Konsequenzen, die zumindest prinzipiell im Experiment überprüft werden können. So beeinflussen alle Mischungsmatrizen in (1.29) die Verzweigungsraten der Nukleonenzerfälle, und Beziehungen wie (2.35-2.40) liefern Eigenschaften des Neutrino-sektors aus den Massenmatrizen der geladenen Fermionen.

Ausgangspunkt der nun folgenden Überlegungen wird die Annahme sein, daß die NNI-Form der Dirac-Massenmatrizen aus den Symmetrieeigenschaften einer wirklich grundlegenden Theorie der Elementarteilchen folgt. Diese nicht näher bekannte Theorie soll als Niederenergie-Näherung eine nichtsupersymmetrische $SO(10)$ -GUT besitzen, welche wiederum über eine intermediäre G_{PS} -Symmetrie in das SM gebrochen wird. Für die fermionischen Massenmatrizen wird bei Skalen $\mu \gtrsim M_I$ der Ansatz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ B & 0 & C \\ 0 & D & E \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

gemacht, wobei der Einfachheit halber nur reelle Einträge betrachtet werden. Das hat auf die Nukleonenzerfälle und Neutrinoeigenschaften, welche die zentralen Gegenstände der Untersuchung darstellen, keine nennenswerten Auswirkungen; lediglich auf das Problem der CP -Verletzung kann nicht eingegangen werden. Es sollte jedoch keine Schwierigkeiten bereiten, mit Hilfe komplexer Yukawa-Kopplungen die beobachtete CP -Verletzung zu reproduzieren.

Eine gängige Methode, bestimmte Texturen in den Massenmatrizen zu realisieren, besteht darin, eine globale $U(1)$ -Familiensymmetrie zusätzlich zur Eichsymmetrie zu verwenden [78]. Die drei $SO(10)$ -Fermiondarstellungen transformieren sich dann gemäß $\mathbf{16}_j \rightarrow \exp(i\alpha_j\theta)\mathbf{16}_j$, wobei j der Generationsindex ist und α_j die paarweise verschiedenen Ladungen bezüglich der $U(1)$ bezeichnet. Besitzt nun eine Higgs-Darstellung $\Phi_k = \mathbf{10}, \mathbf{120}$ oder $\mathbf{126}$ das $U(1)$ -Transformationsverhalten $\Phi_k \rightarrow \exp(i\beta_k\theta)\Phi_k$, so sind nur solche Yukawa-Terme $\mathbf{16}_i \bar{\Phi}_k \mathbf{16}_j$ $U(1)$ -invariant, welche die Bedingung $\alpha_i + \alpha_j = \beta_k$ erfüllen. Da die Einträge der Massenmatrizen gemäß

$$\mathbf{M} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

bestimmte $U(1)$ -Ladungen besitzen, kann man die NNI-Form realisieren, indem nur Higgs-Darstellungen Φ_k mit den Ladungen $\beta = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$ und $\alpha_3 + \alpha_3$ verwendet werden.

Dabei ist es möglich, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_3$ zu wählen, was die Anzahl der benötigten Darstellungen weiter reduziert. Die $U(1)$ -Familiensymmetrie wird bei M_I spontan gebrochen, da dort die massenerzeugenden Higgs-Darstellungen $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ selbst massiv werden. Unterhalb von M_I werden aufgrund von Renormierungseffekten im allgemeinen auch die Einträge ungleich Null sein, welche gemäß (4.31) verschwinden.

Für die Yukawa-Kopplungsmatrizen kommen dann bei Skalen $\mu \gtrsim M_I$ unter Verwendung der Bezeichnungen in Tabelle 2.3 folgende Möglichkeiten in Frage:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_1 \end{pmatrix} ; & \mathbf{Y}_{126}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1 \end{pmatrix} ; & \mathbf{Y}_{120}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 \\ -z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \\ \mathbf{Y}_{10}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix} ; & \mathbf{Y}_{126}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & y_2 & 0 \end{pmatrix} ; & \mathbf{Y}_{120}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & -z_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Das Higgs-Spektrum des Modells soll genau eine **126** enthalten, welche die Symmetriebrechung bei M_I realisiert. Mehr als eine **126** zu verwenden ist nicht verboten, aber unnötig und würde die Vorhersagekraft insbesondere im Neutrinosektor beträchtlich reduzieren. Damit der See-Saw-Mechanismus gemäß (2.51) anwendbar ist, muß die Majorana-Massenmatrix der rechtshändigen Neutrinos (2.39) invertierbar sein. Aus diesem Grunde ist die Kopplung der **126** durch $\mathbf{Y}_{126}^{(1)}$ aus (4.33) bestimmt.

Um die Asymmetrie gemäß (4.31) erzeugen zu können, sind beide **120**-Darstellungen mit den Kopplungsmatrizen $\mathbf{Y}_{120}^{(1)}$ und $\mathbf{Y}_{120}^{(2)}$ erforderlich. Übernimmt man auch beide möglichen **10**-Darstellungen aus (4.33) in den Higgs-Inhalt des Modells und beteiligt sämtliche $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10/120}$ - und $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126}$ -Komponenten an der Massenerzeugung der Fermionen bei M_Z , das heißt gibt ihnen Massen $\sim M_I$, so erhält man $(N_1, N_{15}) = (4, 3)$. Für diesen Fall findet gemäß der Analyse in Abschnitt 4.1.1 keine Vereinheitlichung statt, so daß eine der $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ Massen der Größenordnung M_U besitzen muß. Die Werte der Skalen und Kopplungen für den Fall $N_1 = 4$ und $N_{15} = 2$ kann man Tabelle C.4 entnehmen; dabei erscheint $M_U \approx 1.3 \cdot 10^{16}$ GeV bezüglich der Konsequenz für die Lebensdauer des Protons sinnvoll zu sein. Um entscheiden zu können, welche der $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ für die Massenerzeugung die geringste Bedeutung hat, werden zunächst die Massenmatrizen unter Verwendung der vier $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10/120}$ und drei $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126}$ konstruiert. Deren allgemeine Gestalt sieht analog zu (2.35-2.40) bei Energien $\mu \gtrsim M_I$ dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d &= v_d^{(1)} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_d^{(2)} \mathbf{Y}_{10}^{(2)} + \omega_d^{(1)} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_d^{(1)} + \tilde{\omega}_d^{(1)}) \mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_d^{(2)} + \tilde{\omega}_d^{(2)}) \mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= v_d^{(1)} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_d^{(2)} \mathbf{Y}_{10}^{(2)} - 3\omega_d^{(1)} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_d^{(1)} - 3\tilde{\omega}_d^{(1)}) \mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_d^{(2)} - 3\tilde{\omega}_d^{(2)}) \mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_u &= v_u^{(1)} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_u^{(2)} \mathbf{Y}_{10}^{(2)} + \omega_u^{(1)} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_u^{(1)} + \tilde{\omega}_u^{(1)}) \mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})} &= v_u^{(1)} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_u^{(2)} \mathbf{Y}_{10}^{(2)} - 3 \omega_u^{(1)} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_u^{(1)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(1)}) \mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_u^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(2)}) \mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \sim M_I \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \equiv M_R \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} \sim \frac{\omega_u^{(1)2}}{M_I} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \equiv M_L \mathbf{Y}_{126}^{(1)} ; \quad M_L \ll \omega_u^{(1)} \quad (4.39)$$

Für die einzelnen nichtverschwindenden Matrixelemente gilt unter Verwendung von (4.33) dann:

$$(\mathbf{M}_d)_{12} = x_1 v_d^{(1)} + y_1 \omega_d^{(1)} + z_1 (\tilde{v}_d^{(1)} + \tilde{\omega}_d^{(1)}) \quad (4.40)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{21} = x_1 v_d^{(1)} + y_1 \omega_d^{(1)} - z_1 (\tilde{v}_d^{(1)} + \tilde{\omega}_d^{(1)}) \quad (4.41)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{23} = x_2 v_d^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_d^{(2)} + \tilde{\omega}_d^{(2)}) \quad (4.42)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{32} = x_2 v_d^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_d^{(2)} + \tilde{\omega}_d^{(2)}) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_d)_{33} &= \tilde{x}_1 v_d^{(1)} + \tilde{y}_1 \omega_d^{(1)} \\ &= \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_d^{(1)} + \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_d^{(1)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_e)_{12} &= x_1 v_d^{(1)} - 3 y_1 \omega_d^{(1)} + z_1 (\tilde{v}_d^{(1)} - 3 \tilde{\omega}_d^{(1)}) \\ &= (\mathbf{M}_d)_{12} - 4 y_1 \omega_d^{(1)} - 4 z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_e)_{21} &= x_1 v_d^{(1)} - 3 y_1 \omega_d^{(1)} - z_1 (\tilde{v}_d^{(1)} - 3 \tilde{\omega}_d^{(1)}) \\ &= (\mathbf{M}_d)_{21} - 4 y_1 \omega_d^{(1)} + 4 z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_e)_{23} &= x_2 v_d^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_d^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_d^{(2)}) \\ &= (\mathbf{M}_d)_{23} - 4 z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_e)_{32} &= x_2 v_d^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_d^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_d^{(2)}) \\ &= (\mathbf{M}_d)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_e)_{33} &= \tilde{x}_1 v_d^{(1)} - 3 \tilde{y}_1 \omega_d^{(1)} \\ &= (\mathbf{M}_d)_{33} - 4 \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_d^{(1)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{12} = x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} + z_1 (\tilde{v}_u^{(1)} + \tilde{\omega}_u^{(1)}) \quad (4.50)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{21} = x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} - z_1 (\tilde{v}_u^{(1)} + \tilde{\omega}_u^{(1)}) \quad (4.51)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{23} = x_2 v_u^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \quad (4.52)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{32} = x_2 v_u^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_u)_{33} &= \tilde{x}_1 v_u^{(1)} + \tilde{y}_1 \omega_u^{(1)} \\ &= \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_u^{(1)} + \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{12} &= x_1 v_u^{(1)} - 3 y_1 \omega_u^{(1)} + z_1 (\tilde{v}_u^{(1)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(1)}) \\
&= (\mathbf{M}_u)_{12} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} - 4 z_1 \tilde{\omega}_u^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{21} &= x_1 v_u^{(1)} - 3 y_1 \omega_u^{(1)} - z_1 (\tilde{v}_u^{(1)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(1)}) \\
&= (\mathbf{M}_u)_{21} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} + 4 z_1 \tilde{\omega}_u^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23} &= x_2 v_u^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\
&= (\mathbf{M}_u)_{23} - 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32} &= x_2 v_u^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\
&= (\mathbf{M}_u)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{33} &= \tilde{x}_1 v_u^{(1)} - 3 \tilde{y}_1 \omega_u^{(1)} \\
&= (\mathbf{M}_u)_{33} - 4 \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Eine der $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126}$ nicht an der Massenerzeugung teilnehmen zu lassen ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß entweder $\omega_{u,d}^{(1)}$, $\tilde{\omega}_{u,d}^{(1)}$ oder $\tilde{\omega}_{u,d}^{(2)}$ Null sein müssen. Wenn man bei fester Parameterzahl zunächst die größtmögliche Freiheit bezüglich der Gestalt der einzelnen Matrizen haben möchte, nämlich für alle j, k $(\mathbf{M}_d)_{jk} \neq (\mathbf{M}_e)_{jk}$ und $(\mathbf{M}_u)_{jk} \neq (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{jk}$ wählen zu können, führt das wegen der Gleichungen (4.45-4.49) und (4.55-4.59) zwangsläufig zu der Wahl $\tilde{\omega}_{u,d}^{(1)} \equiv 0$.

Damit ist der Ansatz für die Massenmatrizen der Fermionen vollständig festgelegt. Alle Matrixeinträge setzen sich aus 14 voneinander unabhängigen freien $SO(10)$ -Higgs-Parametern in Form von Produkten aus Vakuumenerwartungswerten und Yukawa-Kopplungen zusammen. Dazu kommt noch die Massenskala M_R der schweren Neutrinos, welche über den See-Saw-Mechanismus (2.51) auch als Vorfaktor ($1/M_R$) in der See-Saw-Matrix erscheint und somit die Beträge der leichten Neutrinomassen festlegt.

Dem stehen 18 zu reproduzierende observable Größen gegenüber, nämlich die 12 Quark- und Leptonmassen sowie jeweils drei Mischungswinkel in \mathbf{V} und \mathbf{U} . Meßbar sind, zumindest bisher, nicht die eigentlichen Massen der leichten Neutrinos, sondern über die Oszillationsexperimente nur die beiden Parameter Δm_{32}^2 und Δm_{21}^2 (siehe Kapitel 3). Dem entspricht in gewisser Weise die Tatsache, daß der Wert von M_R im Rahmen von GUT-Massenmodellen mit See-Saw-Mechanismus aufgrund des zu komplizierten vollständigen Higgs-Potentials nicht exakt berechenbar ist. Wie schon in Abschnitt 2.3.3 erläutert wurde, läßt sich lediglich die qualitative Relation $M_R \sim M_I$ angeben, der genaue Wert von M_R muß an die experimentellen Resultate angepaßt werden.

Es können demnach drei Vorhersagen gemacht werden, die im vorliegenden Fall alle im Neutrinosektor liegen. Allein aufgrund der Parameterzahl ist eine mögliche Erklärung der Anomalien von Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos gemäß Abschnitt 3.2.4 als absolut nichttrivial zu betrachten. Die Zahl der freien Higgs-Parameter mag im Vergleich zu älteren Massenmodellen groß erscheinen; dafür werden in dem hier vorgeschlagenen Modell aber auch alle Massen der geladenen Fermionen sowie die CKM-Mischungswinkel bis auf Rundungsfehler korrekt wiedergegeben, während bisher Resultate $\pm 10\%$ vom tatsächlichen

Wert schon als erfolgreich galten. Ferner wird zur Massenerzeugung auf keine Mechanismen zurückgegriffen, die, wie zum Beispiel nichtrenormierbare Operatoren, außerhalb der zugrundegelegten $SO(10)$ -Theorie liegen.

4.4 Numerische Lösung des Massenmodells

Ausgangspunkt für den ersten Schritt in der numerischen Bestimmung der Massenmatrizen und Mischungen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{M}_u \mathbf{U}_R &= \mathbf{M}_u^{(D)}, & \mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{M}_d \mathbf{D}_R &= \mathbf{M}_d^{(D)}, \\ \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{E}_R &= \mathbf{M}_e^{(D)}, & \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L &= \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

welches, um die $SO(10)$ -Beziehungen (4.34-4.39) ausnutzen zu können, bei $\mu = M_I$ gelöst werden muß. Auf den rechten Seiten der Gleichungen stehen dann die physikalischen Fermionmassen und die CKM-Matrix bei M_I . Bekannt sind deren Werte zunächst nur bei M_Z (siehe (1.33) und Tabelle 1.6). Um mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen des SM aus Anhang B.1 trotz Unkenntnis der Massenmatrizen bei M_Z die entsprechenden Werte bei M_I zu erhalten, werden zwei vereinfachende Annahmen gemacht:

- Die Skalenabhängigkeit der CKM-Matrix \mathbf{V} ist sehr klein. Das ist in [79] bestätigt worden.
- Die Teilchenmassen bei M_I sind in guter Näherung unabhängig von der expliziten Form der Massenmatrizen bei M_Z . Das ist zumindest dann korrekt, wenn $|(\mathbf{M}_u)_{33}|$ sehr viel größer als alle anderen Einträge in $\mathbf{M}_{u,d,e}$ ist.

Inwieweit obige Annahmen im vorliegenden Fall berechtigt sind, wird sich später zeigen, wenn die Renormierungsgruppengleichungen der dann bekannten Yukawa-Matrizen von M_I nach M_Z integriert und diese bei M_Z diagonalisiert werden.

Nun kann man die Yukawa-Matrizen bei M_Z diagonal ansetzen und die Gleichungen (B.7-B.17) nach $M_I = 6.14 \cdot 10^{10}$ GeV integrieren; die Resultate sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Größe:	$m_u(M_I)$	$m_d(M_I)$	$m_s(M_I)$
Wert:	1.16 MeV	2.38 MeV	47.4 MeV
Größe:	$m_c(M_I)$	$m_b(M_I)$	$m_t(M_I)$
Wert:	337.6 MeV	1360 MeV	101.2 GeV
Größe:	$m_e(M_I)$	$m_\mu(M_I)$	$m_\tau(M_I)$
Wert:	513 keV	108.14 MeV	1838.3 MeV

Tabelle 4.1: Fermionmassen bei M_I

In die Berechnungen geht auch die experimentell nicht bekannte Higgs-Selbstkopplung λ ein, welche in niedrigster Ordnung über

$$m_H^2 = \lambda v^2; \quad v = 246.2 \text{ GeV} \quad (4.61)$$

mit der Masse m_H des SM-Higgs-Bosons zusammenhängt. Es muß also eine Annahme für $\lambda(M_Z)$ gemacht werden, wobei sich zeigt, daß $\lambda(M_Z) = 0.5$ ein sinnvoller Wert zu sein scheint. Für $\lambda(M_Z) \lesssim 0.4$ führt die Integration von (B.7-B.17) nämlich auf $\lambda(M_I) < 0$, während für $\lambda(M_Z) \gtrsim 0.6$ der Wert von $\lambda(M_I)$ größer als 1 wird, was die Anwendbarkeit der Störungsrechnung gefährdet; dieses Phänomen ist in [13] erwähnt worden. $\lambda(M_Z) = 0.5$ würde in führender Ordnung einer Higgs-Masse von $m_H \approx 174 \text{ GeV}$ entsprechen, was mit den experimentellen Grenzen in [12] vereinbar ist.

Damit sind die Matrizen auf den rechten Seiten von (4.60) bestimmt. Auf den linken Seiten stehen 31 unbekannte Größen:

- In den drei Massenmatrizen \mathbf{M}_f ($f = u, d, e$) die 14 $SO(10)$ -Higgs-Parameter aus (4.40-4.54). Es sind jedoch nur 13 voneinander unabhängig, da zwei lediglich in der Kombination $z_2(\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)})$ vorkommen; um $z_2\tilde{v}_u^{(2)}$ und $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ separat bestimmen zu können, muß die Dirac-Massenmatrix der Neutrinos bekannt sein. Dies wird aber erst nach dem nächsten Schritt der Fall sein.
- Gemäß der Parametrisierung (1.34) jeweils drei Winkel $\theta_{L,Rij}^{(f)}$ ($ij = 12, 23, 31$) in den sechs Mischungsmatrizen, also insgesamt 18 Mischungswinkel.

Dem stehen 30 nichtlineare Bestimmungsgleichungen gegenüber, jeweils neun aus den ersten drei Beziehungen von (4.60) und drei unabhängige Gleichungen aus der letzten. Um das Problem numerisch behandeln zu können, muß also einer der freien Parameter vorgegeben werden. Hierfür wird der Quotient \tilde{y}_1/y_1 ausgewählt, welcher die Form der Majorana-Matrix (4.38) bis auf einen Vorfaktor eindeutig festlegt:

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} = M_R \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = y_1 M_R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1/y_1 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Als möglicher Wertebereich für \tilde{y}_1/y_1 erscheint aufgrund der Massenhierarchie der Fermionen $1 \lesssim |\tilde{y}_1/y_1| \lesssim 1000$ plausibel. Bevor jedoch die Lösungen und ihre Eigenschaften behandelt werden, sei an dieser Stelle auf die Bedeutung der $SO(10)$ -spezifischen Beziehungen (4.34-4.37) hingewiesen.

Wie man an (4.40-4.49) erkennt, sind bei bekanntem \mathbf{M}_d in \mathbf{M}_e noch drei Freiheitsgrade enthalten, nämlich $y_1\omega_d^{(1)}$, \tilde{y}_1/y_1 und $z_2\tilde{\omega}_d^{(2)}$. Da die Leptonmassen sich auch bei M_I deutlich von den Massen der d -Quarks unterscheiden, müssen diese Parameter derart festgelegt werden, daß \mathbf{M}_e die korrekten Teilchenmassen liefert. Dann sind die $SO(10)$ -Higgs-Parameter

im d - e -Sektor eindeutig bestimmt:

$$x_1 v_d^{(1)} = \frac{1}{8} (3 (\mathbf{M}_d)_{12} + 3 (\mathbf{M}_d)_{21} + (\mathbf{M}_e)_{12} + (\mathbf{M}_e)_{21}) \quad (4.63)$$

$$y_1 \omega_d^{(1)} = \frac{1}{8} ((\mathbf{M}_d)_{12} + (\mathbf{M}_d)_{21} - (\mathbf{M}_e)_{12} - (\mathbf{M}_e)_{21}) \quad (4.64)$$

$$z_1 \tilde{v}_d^{(1)} = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_d)_{12} - (\mathbf{M}_d)_{21}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_e)_{12} - (\mathbf{M}_e)_{21}) \quad (4.65)$$

$$\tilde{x}_1 v_d^{(1)} = \frac{1}{4} (3 (\mathbf{M}_d)_{33} + (\mathbf{M}_e)_{33}) \quad (4.66)$$

$$\tilde{y}_1 \omega_d^{(1)} = \frac{1}{4} ((\mathbf{M}_d)_{33} - (\mathbf{M}_e)_{33}) \quad (4.67)$$

$$x_2 v_d^{(2)} = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_d)_{23} + (\mathbf{M}_d)_{32}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_e)_{23} + (\mathbf{M}_e)_{32}) \quad (4.68)$$

$$z_2 \tilde{v}_d^{(2)} = \frac{1}{8} (3 (\mathbf{M}_d)_{23} - 3 (\mathbf{M}_d)_{32} + (\mathbf{M}_e)_{23} - (\mathbf{M}_e)_{32}) \quad (4.69)$$

$$z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} = \frac{1}{8} ((\mathbf{M}_d)_{23} - (\mathbf{M}_d)_{32} - (\mathbf{M}_e)_{23} + (\mathbf{M}_e)_{32}) \quad (4.70)$$

$$\frac{\tilde{x}_1}{x_1} = 2 \frac{3 (\mathbf{M}_d)_{33} + (\mathbf{M}_e)_{33}}{3 (\mathbf{M}_d)_{12} + 3 (\mathbf{M}_d)_{21} + (\mathbf{M}_e)_{12} + (\mathbf{M}_e)_{21}} \quad (4.71)$$

$$\frac{\tilde{y}_1}{y_1} = 2 \frac{(\mathbf{M}_d)_{33} - (\mathbf{M}_e)_{33}}{(\mathbf{M}_d)_{12} + (\mathbf{M}_d)_{21} - (\mathbf{M}_e)_{12} - (\mathbf{M}_e)_{21}} \quad (4.72)$$

$$\frac{\tilde{v}_d^{(1)}}{\tilde{\omega}_d^{(1)}} = \frac{3 (\mathbf{M}_d)_{12} - 3 (\mathbf{M}_d)_{21} + (\mathbf{M}_e)_{12} - (\mathbf{M}_e)_{21}}{(\mathbf{M}_d)_{12} - (\mathbf{M}_d)_{21} - (\mathbf{M}_e)_{12} + (\mathbf{M}_e)_{21}} \quad (4.73)$$

$$\frac{\tilde{v}_d^{(2)}}{\tilde{\omega}_d^{(2)}} = \frac{3 (\mathbf{M}_d)_{23} - 3 (\mathbf{M}_d)_{32} + (\mathbf{M}_e)_{23} - (\mathbf{M}_e)_{32}}{(\mathbf{M}_d)_{23} - (\mathbf{M}_d)_{32} - (\mathbf{M}_e)_{23} + (\mathbf{M}_e)_{32}} \quad (4.74)$$

Ist nun auch \mathbf{M}_u bekannt, enthält die Dirac-Massenmatrix der Neutrinos $\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})}$ gemäß (4.50-4.59) relativ zu \mathbf{M}_u nur noch den Freiheitsgrad $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$, da \tilde{y}_1/y_1 aus dem d - e -Sektor bestimmt ist. Auch $y_1 \omega_u^{(1)}$ ist durch die Kenntnis von \mathbf{M}_u bereits eindeutig festgelegt, wie die zweite der folgenden Gleichungen zeigt:

$$x_1 v_u^{(1)} = \frac{-\frac{\tilde{y}_1}{2y_1} ((\mathbf{M}_u)_{12} + (\mathbf{M}_u)_{21}) + (\mathbf{M}_u)_{33}}{\frac{\tilde{x}_1}{x_1} - \frac{\tilde{y}_1}{y_1}} \quad (4.75)$$

$$y_1 \omega_u^{(1)} = \frac{\frac{\tilde{x}_1}{2x_1} ((\mathbf{M}_u)_{12} + (\mathbf{M}_u)_{21}) - (\mathbf{M}_u)_{33}}{\frac{\tilde{x}_1}{x_1} - \frac{\tilde{y}_1}{y_1}} \quad (4.76)$$

$$z_1 \tilde{v}_u^{(1)} = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_u)_{12} - (\mathbf{M}_u)_{21}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{12} - (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{21}) \quad (4.77)$$

$$\tilde{x}_1 v_u^{(1)} = \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_u^{(1)} \quad (4.78)$$

$$\tilde{y}_1 \omega_u^{(1)} = \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)} \quad (4.79)$$

$$x_2 v_u^{(2)} = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_u)_{23} + (\mathbf{M}_u)_{32}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23} + (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32}) \quad (4.80)$$

$$z_2 \tilde{v}_u^{(2)} = \frac{1}{8} (3 (\mathbf{M}_u)_{23} - 3 (\mathbf{M}_u)_{32} + (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23} - (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32}) \quad (4.81)$$

$$z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)} = \frac{1}{8} ((\mathbf{M}_u)_{23} - (\mathbf{M}_u)_{32} - (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23} + (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32}) \quad (4.82)$$

Anders ausgedrückt, wenn man einen Wert für \tilde{y}_1/y_1 vorgibt und Lösungen für die Massenmatrizen der geladenen Fermionen findet, welche (4.60) erfüllen, so ist der Neutrinosektor der Theorie bis auf die beiden Parameter $y_1 M_R$ und $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$ eindeutig festgelegt. Das wiederum deutet schon den zweiten Schritt der Analyse an, nämlich die Suche nach Werten für \tilde{y}_1/y_1 und $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$, welche eine Oszillationslösung für die Anomalien der Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos gemäß 3.2.4 ermöglichen.

Die Suche nach Lösungen von (4.60) für vorgegebene Werte von \tilde{y}_1/y_1 mit $1 \lesssim |\tilde{y}_1/y_1| \lesssim 1000$ liefert folgende Resultate:

- Für $|\tilde{y}_1/y_1| \lesssim 5$ und $|\tilde{y}_1/y_1| \gtrsim 500$ können keine Lösungen gefunden werden.
- Für $5 \lesssim |\tilde{y}_1/y_1| \lesssim 500$ existieren Lösungen. Es gibt bei gegebenem \tilde{y}_1/y_1 bis zu sechs (bei $20 \lesssim \tilde{y}_1/y_1 \lesssim 25$) verschiedene Sätze von Quark-Massenmatrizen und zu jedem dieser Paare jeweils zwei Möglichkeiten für die Massenmatrix der geladenen Leptonen, welche (4.60) erfüllen. Letzteres resultiert aus der Tatsache, daß es zu jeder Matrix \mathbf{M}_d zwei Werte des Parameters $z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)}$ gibt, welche die korrekten Leptonmassen liefern; der Parameter $y_1 \omega_d^{(1)}$ dagegen ist in beiden Fällen gleich groß.

Es werden nur ganzzahlige Werte für \tilde{y}_1/y_1 untersucht, da die Lösungen, sofern sie existieren, stetig von \tilde{y}_1/y_1 abhängen. Man erhält mit dem Ansatz (4.34-4.39) für die Massenmatrizen demnach eine Vielzahl von Lösungen für die Matrizen der geladenen Fermionen, welche die beobachteten Massen und CKM-Mischungen liefern. Nun muß der Neutrinosektor in die Analyse mit einbezogen werden.

Es verbleiben zwei Parameter, welche aus den nun bekannten Massenmatrizen der geladenen Fermionen gemäß den Beziehungen (4.63-4.82) nicht berechnet werden können, nämlich $y_1 M_R$ und $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$. Ersterer kann im Rahmen des Massenmodells nicht exakt vorhergesagt werden, sondern muß am Ende an die Resultate der Oszillationsexperimente angepaßt werden, wobei $M_R \sim M_I$ gelten sollte. Bei vorgegebenem \tilde{y}_1/y_1 ist demnach $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$ der einzige noch freie Parameter in der Dirac-Massenmatrix der Neutrinos; die Majorana-Matrix ist bis auf den globalen Vorfaktor $y_1 M_R$ festgelegt. Die Aufgabe besteht also darin, zu untersuchen, ob für diejenigen Werte von \tilde{y}_1/y_1 , welche Lösungen von (4.60) liefern, der Parameter $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$ so gewählt werden kann, daß die Massen und Mischungen der leichten Neutrinos phänomenologisch sinnvoll sind, das heißt den experimentellen Grenzen in (3.20-3.27) genügen. Da das Fermionspektrum des Modells drei Neutrino-Arten enthält, können durch Oszillationslösungen zwei der drei in Kapitel 3 diskutierten Neutrinoprobleme erklärt werden; das sollen aufgrund der im Vergleich zu den LSND-Resultaten deutlich stärkeren Evidenz die Anomalien der Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos sein. Wegen der Argumentation in Abschnitt 3.2.1 wird für das Sonnen-Neutrinodefizit nur der MSW-Effekt berücksichtigt.

Konkret sieht die Vorgehensweise wie folgt aus:

- Für festes \tilde{y}_1/y_1 wird der gesamte plausibel erscheinende Wertebereich für $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ untersucht. Im folgenden wird $|z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}| \lesssim m_t(M_I)$ gewählt.
- Bei gegebenem $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Wert werden die Dirac-, Majorana- und See-Saw-Massenmatrizen der Neutrinos bestimmt; letztere wird gemäß (2.53) diagonalisiert.
- Auf diese Weise erhält man die Massen m_{ν_i} der leichten Neutrinos bis auf den Vorfaktor $1/(y_1 M_R)$, es wird $|m_{\nu_3}| \geq |m_{\nu_2}| \geq |m_{\nu_1}|$ sowie $\Delta m_{\text{atm}}^2 \equiv m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2$ und $\Delta m_{\text{sun}}^2 \equiv m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2$ angenommen. Die leptonische Mischungsmatrix $\mathbf{U} \equiv \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{N}_L$ ist damit ebenfalls bekannt.
- Nun wird überprüft, ob die so erhaltenen Neutrinoeigenschaften den Einschränkungen (3.20-3.27) genügen. In Unkenntnis der Massenskala M_R werden folgende Forderungen an die Lösungen gestellt:

$$|(\mathbf{U})_{13}| \leq 0.05 \quad (4.83)$$

$$0.49 \leq |(\mathbf{U})_{23}| \leq 0.71 \quad (4.84)$$

$$0.03 \leq |(\mathbf{U})_{12}| \leq 0.05 \quad (\text{MSW mit kleiner Mischung})$$

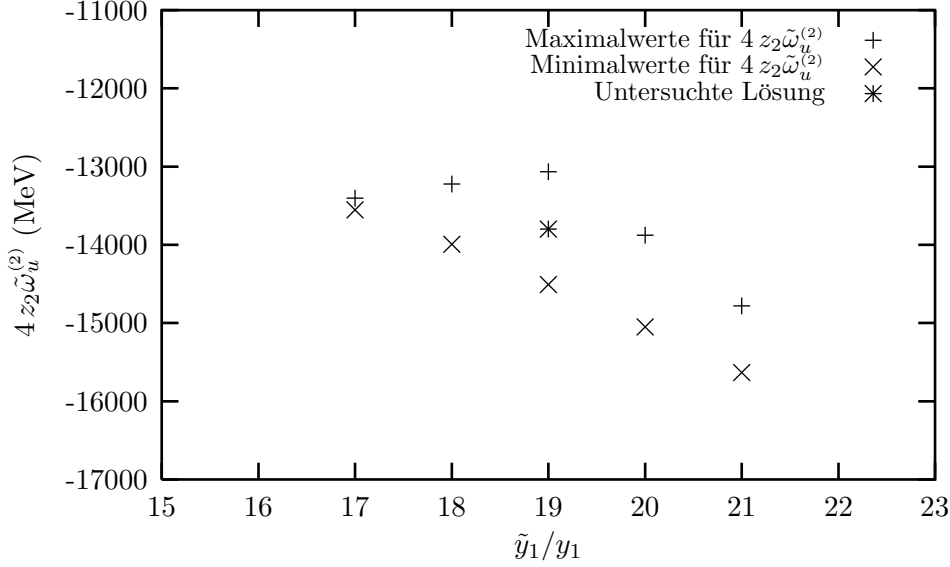
$$\text{oder } 0.35 \leq |(\mathbf{U})_{12}| \leq 0.49 \quad (\text{MSW mit großer Mischung}) \quad (4.85)$$

$$50 \leq \Delta m_{\text{atm}}^2 / \Delta m_{\text{sun}}^2 \equiv (m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2) / (m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2) \leq 1000 \quad (4.86)$$

Es zeigt sich, daß drei Bereiche im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum existieren, in denen Lösungen von (4.60) liegen, welche zudem im Neutrino-sektor die Forderungen (4.83-4.86) erfüllen. Die Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 zeigen die Lage der entsprechenden Parameterbereiche, wobei zu jedem untersuchten ganzzahligen \tilde{y}_1/y_1 -Wert die Minimal- und Maximalwerte von $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ angegeben sind, die zu Neutrinoeigenschaften führen, welche den Einschränkungen (4.83-4.86) genügen. Ein Bereich liefert MSW-Lösungen für das Sonnen-Neutrino Defizit mit großem Mischungswinkel, die anderen beiden Bereiche liefern MSW-Lösungen mit kleiner Mischung.

Aus jedem der drei Bereiche wird nun eine repräsentative Lösung ausgewählt, die genauer untersucht werden soll. Deren Werte für \tilde{y}_1/y_1 und $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ werden so gewählt, daß die zugehörigen Punkte ungefähr in der Mitte der erlaubten Parameterbereiche liegen, da sowohl die bestehenden als auch die neu hinzukommenden Neutrinoexperimente die Grenzen in (3.20-3.27) weiter einschränken werden. Tabelle 4.2 faßt die Parameterwerte für die drei Beispielmmodelle zusammen.

Die numerischen Resultate für die untersuchten Beispielmmodelle sind in Anhang D zusammengefaßt. Zunächst gibt Abschnitt D.1 Auskunft über die nichtverschwindenden Einträge aller Massenmatrizen sowie die Fermionmassen und -mischungen bei M_I . Daraus lassen sich mit Hilfe von (4.63-4.82) die Werte der $SO(10)$ -Higgs-Parameter berechnen; die Resultate enthält Abschnitt D.2. Um die Werte dieser Größen bei M_Z zu erhalten,

Abbildung 4.1: MSW-Lösung 1 (große Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum

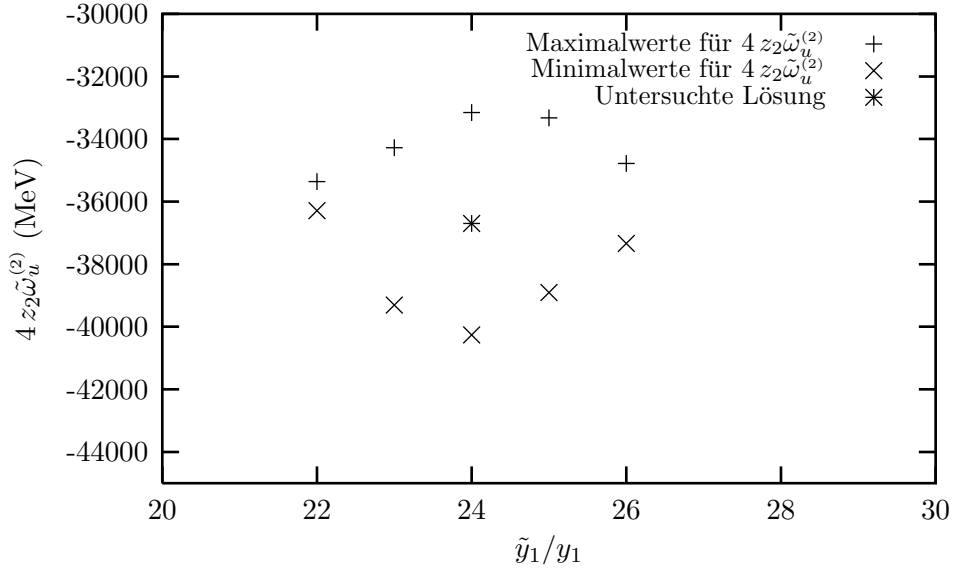
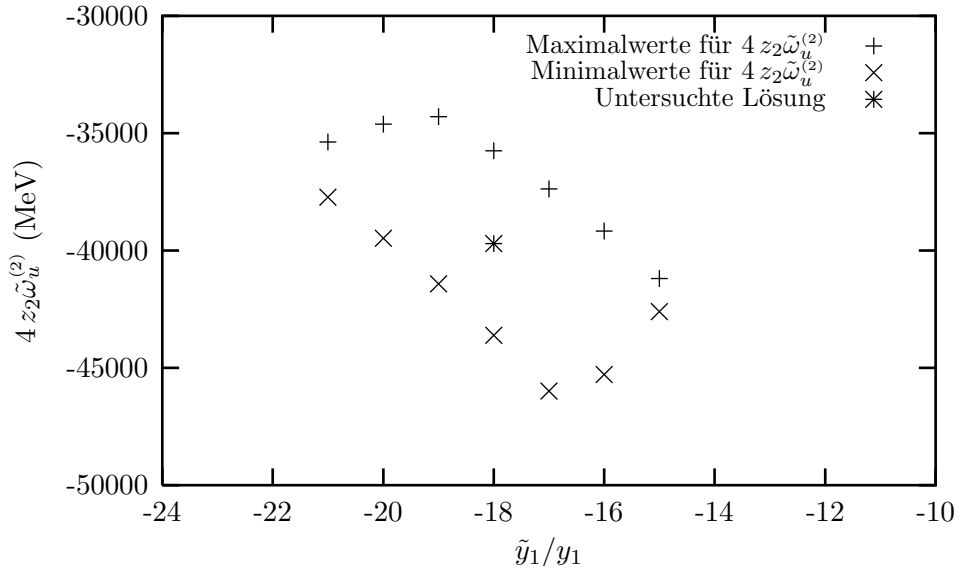
Lösung	MSW-Effekt	\tilde{y}_1/y_1	$z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ (MeV)
Modell 1	große Mischung	19	-3450
Modell 2a	kleine Mischung	24	-9175
Modell 2b	kleine Mischung	-18	-9925

Tabelle 4.2: Werte von \tilde{y}_1/y_1 und $z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ für die drei Beispiellösungen

müssen die Renormierungsgruppengleichungen (B.7-B.20) des SM einschließlich derjenigen für die See-Saw-Massenmatrix von M_I nach M_Z integriert werden. Dabei werden auch die Matrixeinträge ungleich Null, die bei M_I wegen des Ansatzes (4.31) verschwinden. Die Elemente der Massenmatrizen der geladenen Fermionen und leichten Neutrinos sowie deren Massen und Mischungen bei M_Z sind in Abschnitt D.3 aufgelistet. Insbesondere die Mischungswinkel werden bei der Berechnung der Nukleonzerfallsraten im nächsten Kapitel von großer Bedeutung sein. Aus ihnen lassen sich auch die CKM-Matrix \mathbf{V} und die leptonte Mischungs matrix \mathbf{U} bestimmen; die Ergebnisse für die drei betrachteten Modelle enthält Abschnitt D.4.

Obwohl die Massenmatrizen in den einzelnen Fällen durchaus verschieden sind, lassen sich folgende gemeinsame Eigenschaften der Lösungen feststellen:

- Die Winkel der CKM-Matrix in der hier für alle Mischungsmatrizen verwendeten Parametrisierung (1.34) sind mit $\theta_{12} = 0.223$, $\theta_{23} = 0.039$ und $\theta_{31} = 0.003$ angesetzt worden, was innerhalb der experimentellen Grenzen liegt. Es zeigt sich, daß die linkshändigen Mischungswinkel der Quarks $\theta_{Ljk}^{(u)}$ und $\theta_{Ljk}^{(d)}$ betragsmäßig zum Teil deutlich größer als die CKM-Winkel sind. Besonders auffällig ist das im Fall von

Abbildung 4.2: MSW-Lösung 2a (kleine Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$ -ParameterraumAbbildung 4.3: MSW-Lösung 2b (kleine Mischung) im \tilde{y}_1/y_1 - $z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$ -Parameterraum

$\theta_{12} \approx \theta_{L12}^{(d)} - \theta_{L12}^{(u)}$. Demnach kann man von der Größe der observablen CKM-Winkel nicht zwangsläufig auf die der linkshändigen Quarkmischungen schließen, wie es häufig getan wird.

- Alle Modelle enthalten betragsmäßig große Mischungswinkel mit Beträgen zwischen 0.5 und 1.0; so ist zum Beispiel $\theta_{R23}^{(d)}$ in allen Fällen sehr groß. Große rechtshändige Mischungen sind insofern von besonderem Interesse, als sie im Rahmen des SM keine experimentell beobachtbaren Auswirkungen haben, in GUT-Modellen wie dem vorliegenden aber durchaus relevant sind. Unter anderem hängen die Verzweigungsraten der Nukleonenzerfälle stark von den Fermionmischungen ab, wie man im nächsten Kapitel sehen wird.
- In den Lösungen ist $(\mathbf{M}_u)_{33} \approx m_t$ und somit betragsmäßig deutlich größer als alle übrigen Matrixeinträge, $(\mathbf{M}_d)_{33}$ und $(\mathbf{M}_e)_{33}$ dagegen sind in \mathbf{M}_d beziehungsweise \mathbf{M}_e nicht allein dominant. Die $(\mathbf{M}_f)_{12}$ - $(\mathbf{M}_f)_{21}$ - und $(\mathbf{M}_f)_{23}$ - $(\mathbf{M}_f)_{32}$ -Asymmetrien in den Massenmatrizen sind in allen Fällen stark ausgeprägt.
- Die zu Beginn des Abschnitts gemachten Annahmen über die Skalenabhängigkeit der Fermionmassen und CKM-Mischungen sind gerechtfertigt. Alle Werte für die Massen bei M_Z , welche die drei Modelle durch Integration der Renormierungsgruppengleichungen liefern, ergeben sich abgesehen von Rundungsfehlern in sehr guter Übereinstimmung mit den ursprünglich angesetzten experimentellen Größen. Auch die aus den Lösungen numerisch bestimmten CKM-Matrizen genügen den experimentellen Grenzen. Lediglich die Skalenabhängigkeit von $\theta_{L23}^{(d)}$ und $\theta_{L31}^{(d)}$ ist nicht völlig zu vernachlässigen; es gilt $\theta_{L23}^{(d)}(M_I) > \theta_{L23}^{(d)}(M_Z)$ und $\theta_{L31}^{(d)}(M_I) < \theta_{L31}^{(d)}(M_Z)$. Das wiederum führt innerhalb der Grenzen zu vergleichsweise großen Werten für $(\mathbf{V})_{33}$, während $(\mathbf{V})_{23}$ und $(\mathbf{V})_{32}$ betragsmäßig am unteren Ende des erlaubten Bereichs liegen. Man könnte diese Schwäche jedoch ohne weiteres beheben, indem man die nun bekannte Skalenabhängigkeit auf den rechten Seiten von (4.60) berücksichtigt. Da die Effekte aber sehr klein sind, wird hier darauf verzichtet.

Die drei untersuchten Beispiellösungen beschreiben den Sektor der geladenen Fermionen in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten für die Massen und Mischungen. Das ist jedoch lediglich ein notwendiges Kriterium dafür, daß der Ansatz (4.31) als sinnvoll zu betrachten ist. Auf die Neutrinoeigenschaften der einzelnen Lösungen, welche die eigentlichen Vorhersagen des Massenmodells darstellen, wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Die in diesem Kapitel verwendeten numerischen Algorithmen sind im wesentlichen [80] entnommen. Zur Integration der Renormierungsgruppengleichungen wurde eine auf der Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung basierende Routine mit adaptiver Schrittweitensteuerung benutzt. Dabei wird der durch die endliche Schrittweite erzeugte Fehler abgeschätzt und unterhalb einer vorgegebenen Schranke gehalten. Diese Schranke wurde so festgelegt, daß

die Fehler aufgrund der Integration deutlich kleiner als die experimentellen Unsicherheiten sind. In den β -Funktionskoeffizienten zweiter Ordnung der Yukawa-Matrizen und der Higgs-Kopplung wurde die Näherung benutzt, nur die betragsmäßig größten Einträge der Yukawa-Matrizen zu verwenden und alle übrigen auf Null zu setzen.

Die Diagonalisierung der Massenmatrizen gemäß (1.29) entspricht der numerischen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems und wurde mit Hilfe der multidimensionalen Newton-Raphson-Methode durchgeführt.

4.5 Eigenschaften der leichten Neutrinos

Die Massen und Mischungen der leichten Neutrinos bei M_Z sind in Tabelle 4.3 zusammengefaßt, welche einen Ausschnitt aus Tabelle D.4 darstellt.

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_1}$	-0.0245 eV	$-8.73 \cdot 10^{-4}$ eV	$1.16 \cdot 10^{-3}$ eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_2}$	0.0876 eV	0.355 eV	-0.467 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_3}$	-2.402 eV	-3.031 eV	4.365 eV
$\theta_{12}^{(\nu)}$	-0.487	-0.050	0.051
$\theta_{23}^{(\nu)}$	0.205	0.506	0.496
$\theta_{31}^{(\nu)}$	0.004	0.003	-0.003
m_{ν_2}/m_{ν_1}	-3.57	-406.3	-401.2
m_{ν_3}/m_{ν_2}	-27.43	-8.54	-9.35
$\left(\frac{m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2}{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2}\right)$	815.4	71.9	86.4

Tabelle 4.3: Massen und Mischungswinkel der leichten Neutrinos bei M_Z

Da sich die Massen der geladenen Leptonen zwischen $\mu = M_Z$ und $\mu/M_Z \approx 0$ kaum ändern, kann man das in noch stärkerem Maße von den Neutrinomassen erwarten, da die Neutrinos nur schwach wechselwirken. Vergleicht man die Tabellen D.4 einerseits und D.1 sowie D.2 andererseits, so erkennt man, daß die Mischungswinkel aller Fermionen zwischen M_I und M_Z nur minimal skalenabhängig sind. Im folgenden wird deshalb von $\theta_{L,Rjk}^{(f)}(M_Z) = \theta_{L,Rjk}^{(f)}(m_p)$ ausgegangen.

In Tabelle 4.3 erkennt man zunächst die starke Ähnlichkeit der Eigenschaften von Modell 2a und 2b. Beide realisieren eine Oszillationslösung des Sonnen-Neutrinodefizits über den MSW-Effekt mit kleinen Mischungen, während Modell 1 auf den MSW-Effekt mit großer Mischung führt. Von den linkshändigen Mischungen der geladenen Leptonen ist lediglich $\theta_{L23}^{(e)}$ in Modell 1 betragsmäßig deutlich größer als Null. In den anderen beiden Fällen kommt die große (23)-Mischung in \mathbf{U} , welche die Anomalie der atmosphärischen Neutrinos erklärt, allein durch die reine Neutrinomischung zustande.

Für $(m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2)/(m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2) \equiv \Delta m_{\text{atm}}^2/\Delta m_{\text{sun}}^2$ waren aufgrund der experimentellen Grenzen Werte zwischen 50 und 1000 zugelassen worden. Hier fällt auf, daß der Wert in Modell 1 nahe an der oberen Schranke ist, während die Resultate in den Modellen 2a,b deutlich im unteren Teil des erlaubten Bereichs liegen. Dem steht die durch Abbildung 3.1(a) begründete Erwartung gegenüber, bei festem Δm_{atm}^2 für den MSW-Effekt mit großer Mischung den im Vergleich zum MSW-Effekt mit kleiner Mischung kleineren Wert für $\Delta m_{\text{atm}}^2/\Delta m_{\text{sun}}^2$ zu finden.

Tabelle 4.4 gibt die Werte von $(y_1 M_R/M_I)$ und $y_1 M_R$ an, welche benötigt werden, um die erhaltenen Vorhersagen für $(m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2)$ und $(m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2)$ an die experimentellen Grenzen für Δm_{atm}^2 und Δm_{sun}^2 aus (3.20-3.27) anzupassen. Sie sind angesichts der erwarteten

Größe	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
M_I (GeV)	$6.14 \cdot 10^{10}$	$6.14 \cdot 10^{10}$	$6.14 \cdot 10^{10}$
$(y_1 M_R/M_I)$	25 – 30	100 – 150	135 – 215
$y_1 M_R$ (GeV)	$(1.54 - 1.84) \cdot 10^{12}$	$(6.14 - 9.21) \cdot 10^{12}$	$(8.29 - 13.20) \cdot 10^{12}$
m_{ν_1} (eV)	$-(8.2 - 9.8) \cdot 10^{-4}$	$-(5.8 - 8.7) \cdot 10^{-6}$	$(5.4 - 8.6) \cdot 10^{-6}$
m_{ν_2} (eV)	$(2.9 - 3.5) \cdot 10^{-3}$	$(2.4 - 3.6) \cdot 10^{-3}$	$-(2.2 - 3.5) \cdot 10^{-3}$
m_{ν_3} (eV)	$-(8.0 - 9.6) \cdot 10^{-2}$	$-(2.0 - 3.0) \cdot 10^{-2}$	$(2.0 - 3.2) \cdot 10^{-2}$
$m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2$ (eV ²)	$(7.7 - 11.3) \cdot 10^{-6}$	$(5.8 - 13.0) \cdot 10^{-6}$	$(4.8 - 12.3) \cdot 10^{-6}$
$m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2$ (eV ²)	$(6.4 - 9.2) \cdot 10^{-3}$	$(3.9 - 8.9) \cdot 10^{-4}$	$(4.0 - 10.1) \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4.4: Werte von $(y_1 M_R/M_I)$ und $y_1 M_R$ und daraus resultierende Neutrinomassen

Relation $M_R \sim M_I$ vergleichsweise groß, da y_1 als Yukawa-Kopplung $\lesssim 1$ sein sollte. Andererseits ist $(y_1 M_R/M_I) \sim 100$ auch keineswegs ausgeschlossen, da der exakte Wert von M_R von zahlreichen Parametern im nicht explizit bekannten Higgs-Potential abhängt. Diese sollten zwar von der Größenordnung 1 sein, aber es ist durchaus möglich, daß der Proportionalitätskoeffizient in $M_R \sim M_I$ aus einer nichttrivialen Kombination der Parameter besteht und im Bereich 1/100 bis 100 liegt. Überdies ist in Abschnitt 4.2 eine Unsicherheit $\lesssim 10^{\pm 2.6} \approx 400$ in M_I aufgrund von Schwelleneffekten berechnet worden. Die Vernachlässigung der massenabhängigen Schwellenkorrekturen bei der Bestimmung von M_I in Abschnitt 4.1 könnte somit theoretisch zu einem um zwei Größenordnungen zu kleinen Wert geführt haben. Eine Kombination dieser beiden Möglichkeiten ist demnach definitiv in der Lage, $(y_1 M_R/M_I) \sim 100$ zu realisieren.

Wie schon weiter oben erwähnt wurde, liegen im Modell 1 die Werte für $m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2$ im unteren Teil des für Δm_{sun}^2 zulässigen Bereichs, während jene für $m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2$ im Rahmen der experimentellen Grenzen von Δm_{atm}^2 relativ groß sind. In den Modellen 2a,b beobachtet man ein gegenteiliges Verhalten dieser Größen.

Vergleicht man die Modellvorhersagen für die leptonische Mischungsmatrix \mathbf{U} (siehe Anhang D.4) mit den Grenzen aus (3.20-3.27), so erkennt man eine gute Übereinstimmung

zwischen beiden; alle Einträge von \mathbf{U} liegen innerhalb der erlaubten Bereiche. Auffällig ist bei allen drei Modellen die Tatsache, daß die (23)-Mischung in \mathbf{U} vergleichsweise klein ist. Insbesondere in Modell 1 ist $|(\mathbf{U})_{23}| = 0.504$ nahe an der unteren Schranke 0.49, während die $|(\mathbf{U})_{23}|$ -Werte in den Modellen 2a,b (0.536 beziehungsweise 0.552) etwas größer sind. Da die existierenden ebenso wie die neu hinzukommenden Neutrinoexperimente die Grenzen in (3.20-3.27) weiter einschränken werden, ist Modell 1 in diesem Sinne weniger überzeugend als die anderen beiden. Das hier vorgeschlagene $SO(10)$ -Massenmodell deutet also auf eine MSW-Lösung mit kleiner Mischung hin. Sollte der MSW-Effekt mit kleiner Mischung durch Experimente eindeutig als Ursache für das Defizit der Sonnen-Neutrinos bestätigt werden, wird es schwierig sein, eines der Modelle 2a und 2b anhand der Eigenschaften im Neutrino-sektor als in der Natur realisiert zu identifizieren. Dazu muß man auf die Vorhersagen bezüglich der Nukleonzerfallsraten zurückgreifen, welche im nächsten Kapitel berechnet werden.

Die Existenz von leichten Majorana-Neutrinos hat eine weitere überprüfbare Konsequenz, nämlich die sogenannten neutrinolosen doppelten β -Zerfälle. Sie kommen durch den Austausch eines Majorana-Neutrinos zwischen zwei zerfallenden Neutronen zustande, was zu Kernreaktionen der Form $X_Z^A \rightarrow X_{Z+2}^A + 2e^-$ führt. Die experimentelle Nichtbeobachtung solcher Prozesse liefert die Einschränkung [81]:

$$\langle m_\nu \rangle \equiv \sum_i ((\mathbf{U})_{1i}^2 m_{\nu_i}) \leq 0.2 \text{ eV} \quad (4.87)$$

Alle hier untersuchten Lösungen erfüllen diese Bedingung.

4.6 Baryonasymmetrie durch Neutrinozerfälle

Obwohl nicht Gegenstand dieser Arbeit, soll hier kurz auf die Möglichkeit hingewiesen werden, die Baryonasymmetrie des Universums im Rahmen einer $SO(10)$ -GUT mit See-Saw-Mechanismus durch den Zerfall der schweren Majorana-Neutrinos zu erklären. Einen aktuellen Überblick zu diesem Thema liefert [15].

Das beobachtete Universum scheint wesentlich mehr Materie als Antimaterie zu enthalten. Wenn n_b , $n_{\bar{b}}$ und n_γ die mittleren Teilchenzahldichten der Baryonen, Antibaryonen und Photonen im Universum bezeichnen, ergibt sich für die Größe $\eta \equiv (n_b - n_{\bar{b}})/n_\gamma$ aus kosmologischen Überlegungen der Wert $4 \cdot 10^{-10} \lesssim \eta \lesssim 7 \cdot 10^{-10}$ [15, 82]. Wenn man davon ausgeht, daß η bei der Entstehung des Universums Null war, so kann die Kosmologie die heute beobachtete Baryonasymmetrie nicht erklären. Dazu muß auf die Physik der Elementarteilchen zurückgegriffen werden.

Wie in [83] gezeigt wurde, sind für die Entstehung der Baryonasymmetrie in einem ursprünglich symmetrischen Universum drei notwendige Kriterien zu erfüllen, nämlich die Existenz baryonzahlverletzender Wechselwirkungen, die Verletzung von C und CP sowie das Vorhandensein eines thermischen Ungleichgewichts. Die Baryonzahlverletzung ist naheliegenderweise notwendig, um $\eta \neq 0$ zu ermöglichen, und ist sowohl in $SO(10)$ - als

auch G_{PS} -Modellen enthalten; lediglich die Kombination $B - L$ ist Teil der Eichsymmetrie und somit eine Erhaltungsgröße. C - und CP -Verletzung sind erforderlich, da sich zeigen läßt, daß andernfalls die Rate der Prozesse, welche Baryonen erzeugen, genauso groß wie die der antibaryonerzeugenden Prozesse ist. Während die Eichboson- und Fermionsektoren von $SO(10)$ -GUTs C - und CP -invariant sind, lassen sich diese Symmetrien durch Einführung komplexer Higgs-Kopplungen explizit brechen. Schließlich ist ein thermisches Ungleichgewicht erforderlich, da der Baryonzahloperator B bei einer Temperatur T im Gleichgewicht den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\langle B \rangle_T &= \text{Tr}(e^{-\beta H} B) = \text{Tr}([\mathcal{CPT}][\mathcal{CPT}]^{-1} e^{-\beta H} B) \\ &= \text{Tr}(e^{-\beta H} [\mathcal{CPT}]^{-1} B [\mathcal{CPT}]) = -\text{Tr}(e^{-\beta H} B) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}\quad (4.88)$$

besitzt, vorausgesetzt, die Theorie ist CPT -invariant. Ob sich ein System im thermischen Gleichgewicht befindet, läßt sich nur durch Lösung seiner Boltzmann-Gleichungen feststellen. In erster Näherung kann man aber sagen, daß ein Ungleichgewicht vorliegt, wenn die Expansionsrate des Universums größer als die Raten der baryon- und leptonzahlverletzenden Wechselwirkungen ist. Das sollte bei Temperaturen $T \gtrsim M_I$ der Fall sein.

Somit ist im vorliegenden $SO(10)$ -Modell die Entstehung einer $B + L$ -Asymmetrie bei Energien $\mu \gtrsim M_I$ möglich. Allerdings existieren auch im SM baryon- und leptonzahlverletzende Prozesse, welche $B - L$ erhalten und auf nichtperturbativen Effekten beruhen. Während nämlich die klassische Lagrangedichte des SM invariant unter globalen $U(1)_{B,L}$ -Symmetrien ist, besitzen die zu diesen Symmetrien gehörenden Ströme in der quantisierten Theorie Anomalien [84]. Das führt zu $B + L$ -verletzenden Prozessen, welche bei $T \approx 0$ durch einen Faktor $\exp(-2\pi/\alpha_2)$ unterdrückt sind und vernachlässigt werden können. Bei Temperaturen $10^2 \text{ GeV} \lesssim T \lesssim 10^{12} \text{ GeV}$ jedoch sind sie in Gegenwart von statischen topologischen Feldkonfigurationen, den sogenannten Sphaleronen, stark genug, um eine vorhandene $B + L$ -Asymmetrie vollständig auszuwaschen [85]. Andererseits sind sie in der Lage, eine bereits vorhandene $B - L$ -Asymmetrie teilweise in eine B -Asymmetrie gemäß

$$B(T \lesssim M_Z) = \frac{32 + 4n_H}{98 + 13n_H} (B - L) \quad (4.89)$$

umzuwandeln.

Nun erhalten im Rahmen der $B - L$ -Symmetriebrechung bei M_I die schweren Neutrinos ihre Massen. Aufgrund ihrer Majorana-Natur können sie über leptonzahlverletzende Prozesse

$$N_R \longrightarrow l_L + \bar{\phi}, \quad N_R \longrightarrow l_L^C + \phi \quad (4.90)$$

sowohl in Leptonen als auch in Antileptonen zerfallen; ϕ bezeichnet ein Higgs-Teilchen. Die notwendige CP -Verletzung wird durch komplexe Kopplungen zwischen N_R , l_L und $\bar{\phi}$ realisiert. Auf diese Weise erhält man eine reine Lepton- und somit eine $B - L$ -Asymmetrie, die gemäß (4.89) in die beobachtete Baryonasymmetrie des Universums konvertiert werden kann [86]. Damit die leptonzahlverletzenden Zerfälle der schweren Neutrinos im erforderlichen

thermischen Ungleichgewicht stattfinden, muß die zugehörige Zerfallsrate kleiner als die Expansionsrate des Universums bei dieser Temperatur sein. Das läßt sich qualitativ als Bedingung

$$m_\nu \lesssim \left(\frac{M}{10^{10} \text{ GeV}} \right)^{-1/2} \cdot 4 \text{ eV} \quad (4.91)$$

für die Massen m_ν der leichten Neutrinos schreiben, wobei $M \equiv \text{Min}\{M_I, 10^{12} \text{ GeV}\}$ ist [87]. Im hier untersuchten Massenmodell ist (4.91) offensichtlich erfüllt.

Kapitel 5

Zerfallsraten der Nukleonen

Wie in Kapitel 2 dargestellt wurde, gehört die Instabilität der Nukleonen zu den bemerkenswertesten Vorhersagen von GUTs. Die Bestimmung der partiellen und totalen Zerfallsraten im Rahmen des hier untersuchten $SO(10)$ -Massenmodells wird Gegenstand dieses Kapitels sein. Dazu sind zwei wesentliche Schritte notwendig:

- Zunächst muß die vollständige effektive Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} der durch Eichboson-austausch vermittelten Nukleonenzerfälle in der Basis der Masseneigenzustände bestimmt werden. Das geschieht analog zur Herleitung der Lagrangedichte der Fermi-Theorie aus jener der elektroschwachen Wechselwirkung.
- Weiterhin muß man die hadronischen Übergangsmatrixelemente berechnen. Hierzu sind in der Vergangenheit das nichtrelativistische Quark-Modell [88, 89, 90], das Bag-Modell [91] und die chirale Störungsrechnung [92] verwendet worden. Ursprüngliche Diskrepanzen zwischen den Resultaten der chiralen Störungsrechnung und denen der Quark-Modelle sind in [93] beseitigt worden; [94] gibt eine Übersicht über die mit den verschiedenen Verfahren erzielten Ergebnisse. In dieser Arbeit wird analog zu [89] und [90] vorgegangen.

Prinzipiell existieren auch Nukleonzerfallsprozesse aufgrund von Higgs-Austausch. Diese sind aber selbst dann vernachlässigbar, wenn das Higgs-Teilchen eine Masse der Größenordnung M_I hat, da die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zur vierten Potenz der sehr kleinen Yukawa-Kopplungen an die drei leichten Quarks ist.

5.1 Die effektive Lagrangedichte

Ausgangspunkt ist der baryonzahlverletzende Anteil der $SO(10)$ -Lagrangedichte (2.27). Verallgemeinert man ihn auf drei Fermionengenerationen und ersetzt die Wechselwirkungen durch die Masseneigenzustände analog zu (1.30), kann man die vollständige effektive Lagrangedichte der Vier-Fermion-Wechselwirkungen berechnen, welche die eichbosonvermittelten

Nukleonenzerfälle beschreibt. Für den Fall zweier Generationen ist das in [95] durchgeführt worden. Unter Benutzung der Fierz-Identitäten

$$(\bar{\Psi}_{1L}\gamma_\mu\Psi_{2L})(\bar{\Psi}_{3L}\gamma^\mu\Psi_{4L}) = (\bar{\Psi}_{1L}\gamma_\mu\Psi_{4L})(\bar{\Psi}_{3L}\gamma^\mu\Psi_{2L}), \quad (5.1)$$

$$\bar{\Psi}_{1L}\gamma_\mu\Psi_{2L} = -\bar{\Psi}_{2R}^C\gamma_\mu\Psi_{1R}^C \quad (5.2)$$

erhält man als Resultat:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & A_1 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{e}_L^+\gamma_\mu d_L^\alpha) + A_2 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{e}_R^+\gamma_\mu d_R^\alpha) \\ & + A_3 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{\mu}_L^+\gamma_\mu d_L^\alpha) + A_4 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{\mu}_R^+\gamma_\mu d_R^\alpha) \\ & + A_5 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{e}_L^+\gamma_\mu s_L^\alpha) + A_6 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{e}_R^+\gamma_\mu s_R^\alpha) \\ & + A_7 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{\mu}_L^+\gamma_\mu s_L^\alpha) + A_8 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta)(\bar{\mu}_R^+\gamma_\mu s_R^\alpha) \\ & + A_9 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{eR}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{10} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{\mu R}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) \\ & + A_{11} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{eR}^C\gamma_\mu s_R^\alpha) + A_{12} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{\mu R}^C\gamma_\mu s_R^\alpha) \\ & + A_{13} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu s_L^\beta)(\bar{\nu}_{eR}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{14} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu s_L^\beta)(\bar{\nu}_{\mu R}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) \\ & + A_{15} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{\tau R}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{16} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta)(\bar{\nu}_{\tau R}^C\gamma_\mu s_R^\alpha) \\ & + A_{17} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{C\gamma}\gamma^\mu s_L^\beta)(\bar{\nu}_{\tau R}^C\gamma_\mu d_R^\alpha) \\ & + \text{ (Terme mit zwei } s\text{-Quarks)} \\ & + \text{ (Terme mit } c\text{-, } b\text{- und } t\text{-Quarks)} \\ & + \text{ (Terme mit } \bar{\tau}_{L,R}^+ \text{ und } \bar{\nu}_{e,\mu,\tau L}^C \text{)} \\ & + \text{ (h.c.)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die A_i -Koeffizienten sind in Anhang E.1 aufgeführt und hängen außer von den Eichbosonmassen $M_{X,Y}$ und $M_{X',Y'}$, für welche $M_{X,Y} = M_{X',Y'} \approx M_U$ angenommen wird, von g_U und den Elementen der fermionischen Mischungsmatrizen $\mathbf{U}_{R,L}$, $\mathbf{D}_{R,L}$, $\mathbf{E}_{R,L}$ und \mathbf{N}_L ab. Diese Größen sind bereits im vorigen Kapitel bestimmt worden, so daß alle A_i bekannt sind. \mathbf{N}_R hat keinen Einfluß auf die A_i , da sie die Massenmatrix der schweren Neutrinos diagonalisiert, welche als Zerfallsprodukte der Nukleonen nicht vorkommen. An dieser Stelle wird klar, warum die Fermionmischungen für die Verzweigungsraten der Nukleonenzerfälle von großer Bedeutung sind.

5.2 Hadronische Übergangsmatrixelemente

Die hier verwendete Methode zur Berechnung der Übergangsmatrixelemente entspricht dem sogenannten „recoil“-Modell in [89]. Grundlage ist ein Quark-Modell mit $SU(6)$ -Spin-Flavour-Symmetrie; die Quarks treten in drei Flavours u , d und s sowie zwei Spinzuständen \uparrow und \downarrow auf. Alle sechs unabhängigen Quarkzustände haben dieselbe Masse m , was eine einheitliche Masse für die Mesonen zur Folge hat. Die $SU(6)$ -Symmetrie wird später bei der Berechnung der Zerfallsraten durch einen Phasenraumfaktor explizit gebrochen.

Es wird in einem Bezugssystem gearbeitet, in dem das Nukleon, bevor es zerfällt, im Ursprung des Systems in Ruhe ist. Die Spineinstellungen $\uparrow \equiv +1/2$ beziehungsweise $\downarrow \equiv -1/2$ werden relativ zur z -Achse angegeben. Der Zerfall führt stets auf ein Antilepton, welches sich in positive z -Richtung bewegt, während das Meson einen Rückstoß in Richtung der negativen z -Achse erhält. Das entstehende Antilepton wird als relativistisch angenommen und es gilt $l_R^C \equiv l^C \uparrow$ und $l_L^C \equiv l^C \downarrow$.

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Matrixelemente soll kurz am Beispiel von $\langle e^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \rangle$ erläutert werden, für Details sei auf [89] verwiesen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung läßt sich die Übergangswahrscheinlichkeit zunächst gemäß

$$|\langle e^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \rangle|^2 \longrightarrow |\langle e_R^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle|^2 + |\langle e_L^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \downarrow \rangle|^2 \quad (5.4)$$

zerlegen. Eine weitere Zerlegung ist möglich, indem der Zustand $|\pi^0\rangle$ durch den Spin-, Flavour- und Farbanteil seiner Wellenfunktion ausgedrückt wird:

$$|\pi^0\rangle = 1/\sqrt{12} \delta_{\rho\sigma} |u^{C\rho} \uparrow u^\sigma \downarrow - u^{C\rho} \downarrow u^\sigma \uparrow - d^{C\rho} \uparrow d^\sigma \downarrow + d^{C\rho} \downarrow d^\sigma \uparrow\rangle \quad (5.5)$$

Dadurch ergeben sich die Matrixelemente der für den Zerfall $p \rightarrow e^+ \pi^0$ relevanten Elementarprozesse:

$$\begin{aligned} \langle e_R^+ u^{C\uparrow} u \downarrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle & \quad , \quad \langle e_R^+ u^{C\downarrow} u \uparrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle , \\ \langle e_R^+ d^{C\uparrow} d \downarrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle & \quad , \quad \langle e_R^+ d^{C\downarrow} d \uparrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Matrixelemente mit e_L^+ im Endzustand erhält man analog. Auch das Proton kann gemäß

$$|p \uparrow\rangle = 1/\sqrt{18} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} |(u^\alpha \uparrow d^\beta \downarrow - u^\alpha \downarrow d^\beta \uparrow) u^\gamma \uparrow\rangle \quad (5.7)$$

in seine Spin-, Flavour- und Farbanteile zerlegt werden. Die Ortsanteile der Wellenfunktionen werden später berücksichtigt, da sie in guter Näherung für alle Zerfallsprozesse gleich groß sind. Die Spin-Flavour-Anteile der Mesonwellenfunktionen können in Anhang E.2 gefunden werden.

Weiterhin identifiziert man die für die Bestimmung von (5.4) relevanten Terme in \mathcal{L}_{eff} als

- $A_2 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R^\alpha)$ für $\langle e_R^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle$
- $A_1 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^+ \gamma_\mu d_L^\alpha)$ für $\langle e_L^+ \pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \downarrow \rangle$

Im nächsten Schritt werden nun alle Quark- und Antiquarkfelder sowohl in den Zustandsfunktionen $|p\rangle$ und $\langle \pi^0|$ als auch in den Lagrangedichtetermen in Form von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sowie Dirac-Spinoren \mathbf{u} und \mathbf{v} ausgedrückt. Für ein Quark q beziehungsweise Antiquark q^C erhält man auf diese Weise

$$q \sim \hat{a}(q) \mathbf{u} + \hat{b}^\dagger(q) \mathbf{v} , \quad q^C \sim \hat{a}(q) \mathbf{v} + \hat{b}^\dagger(q) \mathbf{u} , \quad (5.8)$$

wobei der Operator $\hat{a}(q)$ ein q -Quark vernichtet und der Operator $\hat{b}^\dagger(q)$ ein q^c -Antiquark erzeugt; die Spinoren \mathbf{u} und \mathbf{v} mit

$$(\not{p} - m)\mathbf{u} = 0, \quad (\not{p} + m)\mathbf{v} = 0 \quad (5.9)$$

sind in [96] definiert. Man erhält auf diese Weise umfangreiche Ausdrücke für die Größen in (5.6), welche sich jedoch beträchtlich vereinfachen, wenn man unter Ausnutzung der Antikommutator-Eigenschaften

$$\{\hat{a}(q), \hat{a}^\dagger(\tilde{q})\} = \{\hat{b}(q), \hat{b}^\dagger(\tilde{q})\} \sim \delta_{q\tilde{q}} \quad (5.10)$$

$$\{\hat{a}(q), \hat{a}(\tilde{q})\} = \{\hat{b}(q), \hat{b}(\tilde{q})\} = \{\hat{a}^\dagger(q), \hat{a}^\dagger(\tilde{q})\} = \{\hat{b}^\dagger(q), \hat{b}^\dagger(\tilde{q})\} = 0 \quad (5.11)$$

$$\{\hat{a}(q), \hat{b}(\tilde{q})\} = \{\hat{a}^\dagger(q), \hat{b}(\tilde{q})\} = \{\hat{a}(q), \hat{b}^\dagger(\tilde{q})\} = \{\hat{a}^\dagger(q), \hat{b}^\dagger(\tilde{q})\} = 0 \quad (5.12)$$

die Vernichtungsoperatoren auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ und die Erzeugungsoperatoren auf den Zustand $\langle 0|$ wirken läßt und dadurch für die meisten Terme Null erhält. In den nichtverschwindenden Beiträgen verbleiben die Spinor-Amplituden, welche noch berechnet werden müssen.

Im „recoil“-Modell wird vom Übergang zweier statischer Quarks derselben Masse m in ein relativistisches Antilepton und ein Antiquark, welches einen Rückstoßimpuls p mit $(p/m = 3/4)$ besitzt, ausgegangen. Die Spinoren der Antileptonen sind demnach durch

$$l_R^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \chi^\uparrow \end{pmatrix}, \quad l_L^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ -\chi^\downarrow \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

und die der statischen Quarks durch

$$\mathbf{u}^\uparrow = \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^\downarrow = \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi^\downarrow \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^\uparrow \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

gegeben. Die nichtstatischen Antiquarks im Endzustand werden durch die Spinoren

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\uparrow &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3\chi^\uparrow \\ -\chi^\uparrow \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^\downarrow = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3\chi^\downarrow \\ \chi^\downarrow \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}^\uparrow &= \frac{-1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ 3\chi^\downarrow \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\downarrow = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -\chi^\uparrow \\ 3\chi^\uparrow \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

beschrieben. Nun lassen sich die Spinor-Amplituden bestimmen; Tabelle 5.1 enthält alle nichtverschwindenden Amplituden und deren Werte. Die Amplituden zu den Zerfällen mit linkshändigen Antileptonen im Endzustand erhält man durch Ersetzen von \bar{l}_R^C mit \bar{l}_L^C und Vertauschen von \uparrow und \downarrow .

Damit kann man die Matrixelemente (5.6) berechnen, und aus diesen lassen sich unter Berücksichtigung der Spin-Flavour-Struktur (5.5) des Mesons wiederum die Übergangswahrscheinlichkeiten in (5.4) bestimmen. Analog verfährt man für alle relevanten Zerfallskanäle; die Tabelle E.4 gibt die Resultate für die Amplituden der elementaren Zerfallsprozesse an, während Tabelle E.5 die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Zerfälle mit physikalischen Endzuständen beinhaltet. Zu beachten ist die Tatsache, daß die Amplituden der einzelnen Elementarprozesse von unterschiedlichen A_i -Koeffizienten gemäß (5.3) begleitet werden.

Amplitude	$(\bar{\mathbf{u}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \uparrow)$	$(\bar{\mathbf{u}} \downarrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \downarrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \downarrow \gamma_\mu \mathbf{v} \downarrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \uparrow)$
Wert	$2/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$
Amplitude	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{v} \downarrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \downarrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{v} \uparrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{v} \downarrow)$
Wert	$-2/\sqrt{5}$	$-2/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$

Tabelle 5.1: Spinor-Amplituden der hadronischen Matrixelemente

5.3 Berechnung der Zerfallsraten

Für die partielle Zerfallsrate eines bestimmten Prozesses $\text{Nukleon} \rightarrow \text{Meson} + \text{Antilepton}$ gilt die Beziehung

$$\Gamma_j = \frac{1}{16\pi} m_{\text{Nukl}}^2 \rho_j |S|^2 |\mathcal{A}|^2 \left(|\mathcal{A}_L|^2 \sum_l |A_l \mathcal{M}_l|^2 + |\mathcal{A}_R|^2 \sum_r |A_r \mathcal{M}_r|^2 \right), \quad (5.16)$$

welche man aus der allgemeinen Bestimmungsgleichung für Γ in Zwei-Teilchen-Zerfällen unter Berücksichtigung der spezifischen Annahmen des „recoil“-Modells erhält. (5.16) ist äquivalent zu der in [90] gegebenen Gleichung für Γ_j und unterscheidet sich von dieser lediglich darin, daß der Phasenraumfaktor und die Übergangsmatrixelemente aus [89] verwendet wurden, welche direkt proportional zu den in [90] benutzten sind. Weiterhin ist in (5.16) die Abhängigkeit von α_U und den Eichbosonmassen in den Koeffizienten A_i aus (5.3) enthalten. Die verschiedenen Größen in (5.16) sind wie folgt definiert:

- \mathcal{M}_l und \mathcal{M}_r sind die für den jeweiligen Zerfallsprozeß relevanten hadronischen Übergangsmatrixelemente, wobei sich die Indizes l und r auf die Chiralität des Antileptons im Endzustand beziehen. Die Summation berücksichtigt die Tatsache, daß für einige Zerfälle zwei Lagrangedichteterme verantwortlich sind. Die Bestimmung der Matrixelemente war Gegenstand des letzten Abschnitts.
- A_l und A_r sind die zu \mathcal{M}_l beziehungsweise \mathcal{M}_r gehörenden Koeffizienten aus der effektiven Lagrangedichte. Gemäß (5.3) treten alle Matrixelemente der elementaren Zerfallsprozesse in Kombination mit einem bestimmten A_i -Koeffizient auf. Tabelle E.5 gibt die Werte für die unabhängigen $|A_r \mathcal{M}_r|^2$ an; alle dort nicht explizit aufgeführten Größen lassen sich durch Symmetrieüberlegungen aus diesen herleiten.
- \mathcal{A} , \mathcal{A}_L und \mathcal{A}_R sind Faktoren, welche aus der Renormierung der Vier-Fermion-Operatoren in der effektiven Lagrangedichte resultieren. Während nämlich die Berechnung der hadronischen Matrixelemente $\mathcal{M}_{r,l}$ für Energieskalen $\mu \approx m_p$ durchgeführt wird, ist die eigentliche baryonzahlverletzende Wechselwirkung bei Skalen $\mu \gtrsim M_U$ wirksam. Das führt zu Renormierungseffekten, welche auf Strahlungskorrekturen zu den Vier-Fermion-Operatoren durch die G_{PS} - und SM-Eichbosonen beruhen. Eine formale Analyse dieses Phänomens im Rahmen einer $SU(5)$ -GUT ist in [97] zu

finden, während [98] die Renormierungseffekte für den Fall einer $SO(10)$ -Theorie untersucht. Für das in dieser Arbeit untersuchte Modell sind die Faktoren durch

$$\mathcal{A}_L = \left(\frac{\alpha_1(M_Z)}{\alpha_1(M_I)} \right)^{-\frac{23}{82}} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{A}_R = \left(\frac{\alpha_1(M_Z)}{\alpha_1(M_I)} \right)^{-\frac{11}{82}} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \left(\frac{\alpha_{4C}(M_I)}{\alpha_{4C}(M_U)} \right)^{-\frac{5}{8}} \left(\frac{\alpha_{2L}(M_I)}{\alpha_{2L}(M_U)} \right)^{-\frac{27}{100}} \left(\frac{\alpha_{2R}(M_I)}{\alpha_{2R}(M_U)} \right)^{-\frac{3}{20}} \left(\frac{\alpha_2(M_Z)}{\alpha_2(M_I)} \right)^{\frac{27}{38}} \\ & \cdot \left(\frac{\alpha_3(M_Z)}{\alpha_3(M_I)} \right)^{\frac{2}{7}} \left(\frac{\alpha_3(m_b)}{\alpha_3(M_Z)} \right)^{\frac{6}{23}} \left(\frac{\alpha_3(m_c)}{\alpha_3(m_b)} \right)^{\frac{6}{25}} \left(\frac{\alpha_3(1 \text{ GeV})}{\alpha_3(m_c)} \right)^{\frac{2}{9}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

gegeben. In die Exponenten gehen die anomalen Dimensionen der Vier-Fermion-Operatoren und die führenden Koeffizienten der jeweiligen Eichkopplungs- β -Funktionen ein. Die Eichkopplungen bei M_Z sind in Tabelle C.1 zu finden, diejenigen bei M_U und M_I wurden im vorigen Kapitel bestimmt; Anhang C.2 enthält die numerischen Resultate. Die Werte von α_3 bei Energien $\mu < M_Z$ sind [99] entnommen:

$$\alpha_3(1 \text{ GeV}) = 0.544, \quad \alpha_3(m_c) = 0.412, \quad \alpha_3(m_b) = 0.226 \quad (5.20)$$

Der Einfluß der Skalenabhängigkeit von α_{em} wird vernachlässigt, da er viel kleiner als der von α_3 ist ($\alpha_{\text{em}}^{-1}(M_Z) \approx 129$, $\alpha_{\text{em}}^{-1}(0) \approx 137$). Unter Verwendung aller Kopplungswerte erhält man

$$|\mathcal{A}_L|^2 = 1.155, \quad |\mathcal{A}_R|^2 = 1.071, \quad |\mathcal{A}|^2 = 23.59 \quad (5.21)$$

- $|S|^2 = \langle \Psi_{\text{Nuc}}^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | \Psi_{\text{Nuc}}^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \rangle$ steht für die Wahrscheinlichkeit, zwei Valenzquarks des Nukleons in einem Raumpunkt zu finden. Das ist erforderlich, damit der Elementarprozeß $qq \rightarrow q^c l^c$ stattfinden kann, da die zugrundeliegende Wechselwirkung extrem kurzreichweitig ist. Ψ_{Nuc}^s ist der Raumanteil der Wellenfunktion des Nukleons. Der räumliche Anteil der Mesonwellenfunktion wird wie in [90] vernachlässigt; die Spin-, Flavour- und Farbanteile der Wellenfunktionen sind bereits in die Berechnung von $\mathcal{M}_{r,l}$ eingegangen. Für $|S|^2$ wird der Wert 0.012 GeV^3 verwendet [100].
- $\rho_j \equiv (1 - \chi_j^2)(1 - \chi_j^4)$ mit $\chi_j = m_{\text{Meson}}/m_{\text{Nukl}}$ ist ein Phasenraumfaktor, welcher die $SU(6)$ -Spin-Flavour-Symmetrie des im letzten Abschnitt verwendeten Quarkmodells explizit bricht. Er berücksichtigt die in der Natur existierenden unterschiedlichen Massen der Mesonen in den Endzuständen der Zerfallsprozesse und ihren Einfluß auf die Raten. Tabelle E.3 enthält die relevanten Werte von ρ_p und ρ_n .

Damit sind alle Größen in (5.16) bekannt und die partiellen sowie totalen Zerfallsraten der Nukleonen können berechnet werden. Sämtliche Resultate sowohl für die untersuchten Modelle als auch für den Fall verschwindender Fermionmischungen sind in den Tabellen E.7-E.10 im Anhang zusammengefaßt.

Man erkennt die generelle Tendenz, daß der Einfluß der Mischungen zu einer deutlichen Unterdrückung des Zerfallskanals $p, n \rightarrow e^+ X$ führt, während die Kanäle $p, n \rightarrow \mu^+ X$ und $p, n \rightarrow \nu^C X$ im Vergleich zum Fall verschwindender Mischungen bevorzugt werden. Besonders auffällig ist das bei den Zerfällen $p, n \rightarrow \mu^+ \pi$, $p, n \rightarrow \nu^C K$ und $p \rightarrow \mu^+ \omega$. Insofern unterscheiden sich die Verzweigungsraten zum Teil beträchtlich von denen nichtsupersymmetrischer GUT-Modelle mit kleinen Mischungen, welche eine deutliche Dominanz von $p, n \rightarrow e^+ X$ -Zerfällen vorhersagen. SUSY-GUTs dagegen bevorzugen Zerfälle mit K -Mesonen im Endzustand [94].

Zwischen den Verzweigungsraten der drei analysierten Modelle bestehen teilweise deutlich ausgeprägte Unterschiede, was man auch an den in Tabelle 5.2 dargestellten Verhältnissen partieller Raten erkennen kann. Während die Modelle 2a und 2b anhand ihrer Eigenschaften

Größe	ohne Mischungen	Modell 1	Modell 2a	Modell 2b
$\frac{\Gamma(p \rightarrow e^+ K^0)}{\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0)}$	0	0.145	0.104	0.162
$\frac{\Gamma(p \rightarrow \mu^+ \pi^0)}{\Gamma(p \rightarrow \mu^+ K^0)}$	0	3.27	6.33	3.11
$\frac{\Gamma(p \rightarrow \nu^C K^+)}{\Gamma(p \rightarrow \nu^C \pi^+)}$	0.003	0.098	0.064	0.157
$\frac{\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0)}{\Gamma(p \rightarrow \nu^C \pi^+)}$	1.040	0.618	0.693	0.993
$\frac{\Gamma(n \rightarrow \mu^+ \pi^-)}{\Gamma(n \rightarrow e^+ \pi^-)}$	0	0.394	0.225	0.200
$\frac{\Gamma(n \rightarrow \mu^+ \rho^-)}{\Gamma(n \rightarrow e^+ \rho^-)}$	0	0.387	0.225	0.195
$\frac{\Gamma(n \rightarrow \nu^C K^0)}{\Gamma(n \rightarrow \nu^C \pi^0)}$	0.113	0.469	0.347	0.722
$\frac{\Gamma(n \rightarrow e^+ \pi^-)}{\Gamma(n \rightarrow \nu^C \pi^0)}$	4.16	2.48	2.78	3.96

Tabelle 5.2: Verhältnisse ausgewählter partieller Nukleonzerfallsraten

im Neutrinosektor praktisch nicht unterscheidbar waren, zeigen sich in ihren Verzweigungsraten Differenzen, welche durchaus experimentell zugänglich sein sollten, sofern in Zukunft Nukleonzerfälle beobachtet werden. Die totalen Zerfallsraten der einzelnen Modelle sind nahezu gleich und führen zu Lebensdauern im Bereich von $\tau_{p,n} \approx (3 - 4) \cdot 10^{34}$ Jahren.

Die in den Tabellen E.7-E.10 dargelegten Resultate dieser Untersuchung sind echte Vorhersagen des verwendeten $SO(10)$ -Massenmodells und verdeutlichen auf eindrucksvolle Weise den Einfluß der Fermionmischungen auf die Verzweigungsraten der Nukleonzerfälle.

Bei allen Rechnungen ist stets mit den Mittelwerten der verwendeten Größen gearbeitet worden, ohne deren Fehler explizit zu berücksichtigen. Das ist insofern begründet, als die Hauptquellen der auftretenden Unsicherheiten in den Einflüssen der Schwellenkorrekturen und den modellspezifischen Näherungen bei der Bestimmung der hadronischen Matrixelemente

zu sehen sind. Gerade diese sind aber im Gegensatz zu den bekannten Meßungenauigkeiten in den SM-Kopplungen und den Fermionmassen und -mischungen nur schwer abzuschätzen. Für die Schwelleneffekte und deren Einfluß auf die Werte der Symmetriebrechungsskalen ist das in Abschnitt 4.2 versucht worden, während [101] die Auswirkung der Unsicherheit in den Übergangsmatrixelementen auf die Lebensdauer des Protons mit einem Faktor $10^{\pm 0.7}$ ansetzt. Es kann allerdings davon ausgegangen werden, daß die Effekte dieser Unsicherheiten in erster Linie die totalen Zerfallsraten beeinflussen, die Verzweigungsraten dagegen deutlich weniger betreffen. Letztere stellen aber die wirklich relevanten Vorhersagen des Massenmodells dar.

5.4 Experimenteller Status

Es bleibt zu prüfen, ob die im letzten Abschnitt gemachten Vorhersagen bezüglich der partiellen und totalen Zerfallsraten der Nukleonen mit den experimentellen Grenzen für diese Größen verträglich sind.

Die Experimente, welche nach Nukleonenzerfällen suchen, lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Wasser-Čerenkovdetektoren wie IMB 3 [102] und Kamiokande beziehungsweise Super-Kamiokande [103] sind besonders zum Nachweis von $p, n \rightarrow e^+ \pi$ geeignet, während die Eisenkalorimeter-Spurdetektoren wie Fréjus [104] und Soudan 2 [105] für Zerfälle mit K -Mesonen und μ^+ im Endzustand sensitiv sind. Keines der Experimente hat bis heute eindeutige Hinweise auf die Instabilität der Nukleonen liefern können, so daß lediglich obere Grenzen für die Zerfallsraten existieren. Die in [7] angegebenen Werte für diese Grenzen

Zerfallsprozeß	Super-Kamiokande [35]	Part. Data Group 1998 [7]
$p \rightarrow e^+ \pi^0$	29	5.5
$p \rightarrow e^+ \eta$	11	1.4
$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	23	2.7
$p \rightarrow \mu^+ K^0$	4.0	1.2
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	7.8	0.69
$p \rightarrow \nu^C K^+$	6.8	1.0
$n \rightarrow \nu^C \eta$	5.6	0.54

Tabelle 5.3: Aktuelle Resultate von Super-Kamiokande für die unteren Grenzen der Nukleonlebensdauern in einigen Zerfallskanälen (alle Werte in 10^{32} Jahren)

sind in Tabelle E.6 aufgeführt, seitdem veröffentlichte Resultate von Super-Kamiokande zeigt Tabelle 5.3. Der Vergleich mit den Modellvorhersagen in den Tabellen E.7-E.10 führt zu dem Schluß, daß diese mit allen experimentellen Grenzen verträglich sind.

Die Grenzwerte für die Lebensdauern bezüglich bestimmter Zerfallsprozesse wie zum Beispiel $p \rightarrow e^+ \pi^0, \mu^+ \pi^0$ erreichen gemäß Tabelle 5.3 bereits den Bereich einiger 10^{33} Jahre,

was lediglich eine Größenordnung unter den in dieser Arbeit gemachten Vorhersagen liegt. Letztere werden also in absehbarer Zeit direkt überprüfbar sein, da Super-Kamiokande weiterhin Daten aufnimmt und Experimente wie das auf einem Detektor aus flüssigem Argon basierende ICARUS [106] neu hinzukommen werden.

Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Untersuchung war ein Modell für die fermionischen Massenmatrizen auf der Grundlage einer $SO(10)$ -Theorie, welche über eine intermediäre Pati-Salam-Symmetrie in das Standardmodell gebrochen wird. Der gewählte Ansatz bestand in einer asymmetrischen „Nearest Neighbour Interaction“-Form der Matrizen, die durch eine globale $U(1)$ -Familiensymmetrie realisiert wird. Dieser beinhaltet im Rahmen des Standardmodells keine physikalischen Konsequenzen, da die rechtshändigen Mischungen dort nicht beobachtbar sind. In Theorien jenseits des Standardmodells jedoch haben alle Fermionmischungen beträchtlichen Einfluß auf observable Größen wie die Zerfallsraten der Nukleonen.

Nach der systematischen Bestimmung der Symmetriebrechungsskalen und Eichkopplungen in Abhängigkeit vom Teilcheninhalt des Modells sowie einer Abschätzung der Schwelleneffekte wurden die Massenmatrizen unter Berücksichtigung der $SO(10)$ -spezifischen Beziehungen zwischen diesen konstruiert. Anschließend sind alle Lösungen des Modells numerisch bestimmt worden, welche neben den bekannten Parametern im Sektor der geladenen Fermionen auch phänomenologisch sinnvolle Neutrinoeigenschaften liefern. Es wurden insgesamt drei Lösungen des Modells gefunden, welche in der Lage sind, die Anomalien der Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos durch Oszillationen zu erklären. Zwei davon deuten auf eine Lösung des Sonnen-Neutrinoproblems durch den MSW-Effekt mit kleiner Mischung hin, während die dritte den MSW-Effekt mit großer Mischung beinhaltet. Bemerkenswert ist, daß alle Lösungen auf leptonische (23)-Mischungen führen, die im Rahmen des zur Erklärung der Anomalie atmosphärischer Neutrinos erlaubten Parameterbereichs vergleichsweise klein sind. Da die (23)-Mischung desjenigen Modells, welches den MSW-Effekt mit großer Mischung realisiert, nahe an der unteren Grenze des zulässigen Bereichs liegt und letzterer durch die Oszillationsexperimente in naher Zukunft weiter eingeschränkt werden wird, sind die anderen beiden Lösungen als realistischer zu betrachten. Im Rahmen des hier analysierten Massenmodells erscheint eine Lösung des Sonnen-Neutrinoproblems durch den MSW-Effekt mit kleiner Mischung als wahrscheinlich.

Alle gefundenen Lösungen besitzen mehrere betragsmäßig große Mischungen im Sektor der geladenen Fermionen. Dabei handelt es sich sowohl um im Standardmodell nicht observable rechtshändige als auch um linkshändige Mischungswinkel. Demnach kann man von der Größe der CKM-Winkel nicht zwangsläufig auf die der linkshändigen Fermionmischungen schließen, wie es häufig getan wird. Die teilweise großen Mischungen führen zu charakteristischen

Verzweigungsraten der Nukleonenzerfälle, welche von denen bei verschwindenden Mischungen deutlich abweichen. Generell läßt sich eine Unterdrückung der Kanäle mit e^+ im Endzustand feststellen, während Kanäle mit μ^+ und ν^c bevorzugt werden. Die drei Lösungen sind aufgrund ihrer Vorhersagen für die Verzweigungsraten auch untereinander unterscheidbar. Die berechneten Lebensdauern der Nukleonen betragen $\tau_{p,n} \approx (3 - 4) \cdot 10^{34}$ Jahre, was je nach Zerfallskanal lediglich ein bis zwei Größenordnungen über den experimentellen Grenzen liegt. Damit sind die Modellvorhersagen in absehbarer Zeit direkt überprüfbar.

Der Einfachheit halber sind alle Massenmatrizen als reell angenommen worden, da das Problem der CP -Verletzung nicht Gegenstand der Arbeit war. Abgesehen von der Standardmethode, die CP -Verletzung über komplexe Yukawa-Kopplungen zu realisieren, bieten Grand Unified-Theorien aufgrund ihres erweiterten Eichboson- und Higgs-Sektors dafür verschiedene weitere Möglichkeiten [107].

Weiterhin wurde auf die Verwendung von Supersymmetrie verzichtet, da supersymmetrische Theorien wegen des wesentlich umfangreicheren Teilchenspektrums zahlreiche zusätzliche Parameter enthalten, deren Werte weitgehend unbestimmt sind. Das hat naturgemäß negative Auswirkungen auf die Vorhersagekraft der Modelle. Auch eine für die Anwendbarkeit des See-Saw-Mechanismus vorteilhafte intermediäre Skala im Bereich $10^{10} - 10^{12}$ GeV ist in supersymmetrischen Theorien nicht auf natürliche Weise realisierbar, da sich die Eichkopplungen des supersymmetrischen Standardmodells im Gegensatz zum nichtsupersymmetrischen Fall genau in einem Punkt treffen. Die Abwesenheit jeglicher experimenteller Hinweise auf eine bei Energien im TeV-Bereich gebrochene Supersymmetrie in der Natur [108] ist ein weiterer Schwachpunkt, mit dem supersymmetrische Theorien bisher behaftet sind. Schließlich deutet auch die Existenz nichtsupersymmetrischer Niederenergie-Vakua in der M-Theorie [109] darauf hin, daß Supersymmetrie keine zwingende Eigenschaft von Theorien jenseits des Standardmodells ist.

Trotz dieser Schwächen im phänomenologischen Bereich ist die Supersymmetrie ein formal überaus ansprechendes Konzept, und es wäre interessant, das hier diskutierte Massenmodell in eine supersymmetrische Grand Unified-Theorie einzubetten und die daraus resultierenden Konsequenzen zu untersuchen. Auch eine Analyse des Modells hinsichtlich seiner Möglichkeiten zur Erklärung der CP -Verletzung und der Baryonasymmetrie des Universums wäre sicherlich sinnvoll.

Auf die generellen Probleme von nichtsupersymmetrischen Grand Unified-Theorien wurde in Kapitel 2 eingegangen. Das Hierarchieproblem und die Nichtberücksichtigung der Gravitation sind wohl die fundamentalsten Schwachpunkte dieser Modelle. Das Hierarchieproblem kann ebenso wie das Problem der Divergenzen zumindest prinzipiell durch eine bei Energien von etwa 1 TeV gebrochene globale Supersymmetrie gelöst werden. Bei solchen Modellen stellt sich aber die Frage, auf welche Weise die Supersymmetrie gebrochen wird. Sowohl die spontane Brechung als auch die explizite Brechung durch Lagrangedichteterme deuten letztendlich auf eine noch fundamentalere Theorie hin. Ein Kandidat für eine solche ist die Supergravitationstheorie, welche auf einer lokalen Supersymmetrie basiert und

die Gravitationswechselwirkung mit einschließt. Auf Supergravitation basierende Modelle sind allerdings nicht renormierbar und können wiederum nur effektive Näherungen einer grundlegenden Theorie sein. Den zur Zeit zweifellos populärsten und vielleicht sogar einzigen ernstzunehmenden Ansatz dafür stellen die Superstringtheorien und das übergeordnete Modell der M-Theorie dar. Sie werden in zehn beziehungsweise elf Raumzeitdimensionen formuliert, was eine Kompaktifizierung der überzähligen Dimensionen notwendig macht, um vierdimensionale effektive Theorien und möglicherweise überprüfbare Voraussagen erhalten zu können. In der äußerst eingeschränkten Vorhersagekraft für den Bereich experimentell zugänglicher Energien besteht die Schwäche dieser Modelle.

Es ist bis heute keine wirklich fundamentale Theorie bekannt, welche die Eigenschaften der Fermionen erklärt. Aus diesem Grunde kommt der Untersuchung effektiver Massenmodelle nach wie vor große Bedeutung zu, da sie vielleicht einen Hinweis auf die zugrundeliegende Symmetrie der Natur liefern.

Anhang A

Gruppentheoretischer Anhang

Die in diesem Anhang zusammengefaßten Eigenschaften ausgewählter irreduzibler Darstellungen sind den Tabellen in [26] entnommen; dort wird ferner eine detaillierte Beschreibung des für Anwendungen in der Elementarteilchenphysik relevanten gruppentheoretischen Formalismus gegeben.

A.1 Casimir-Operator und Dynkin-Index

Die Generatoren einer Lie-Algebra erfüllen unabhängig von der expliziten Darstellung die Vertauschungsrelationen

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad , \quad (\text{A.1})$$

wobei die f_{abc} die Strukturkonstanten der Algebra sind. Der quadratische Casimir-Operator $\hat{C}_2 \equiv \sum_a T_a T_a$ kommutiert mit allen Generatoren und ist somit bezüglich jeder irreduziblen Darstellung \mathcal{R} der Liegruppe G ein Vielfaches der Einheitsmatrix; der zugehörige Eigenwert wird mit $C_2(\mathcal{R})$ bezeichnet:

$$\hat{C}_2(\mathcal{R}) \mathcal{R} = C_2(\mathcal{R}) \mathcal{R} \quad (\text{A.2})$$

Der Dynkin-Index $S_2(\mathcal{R})$ einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R} ist über

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(T_a T_b) = S_2(\mathcal{R}) \delta_{ab} \quad (\text{A.3})$$

definiert. Zwischen $C_2(\mathcal{R})$ und $S_2(\mathcal{R})$ gilt die Beziehung

$$d(\mathcal{G}) S_2(\mathcal{R}) = d(\mathcal{R}) C_2(\mathcal{R}) \quad , \quad (\text{A.4})$$

wobei $d(\mathcal{R})$ die Dimension von \mathcal{R} bezeichnet; \mathcal{G} steht für die adjungierte Darstellung von G . Für die $SU(N)$ -Gruppen gelten die Normierungen $C_2(\mathcal{G}) = S_2(\mathcal{G}) = N$ und $S_2(N) = 1/2$, während für die $U(1)_Y$ $C_2(\mathcal{R}) = S_2(\mathcal{R}) = Y^2$ und $C_2(\mathcal{G}) = S_2(\mathcal{G}) = 0$ ist.

In der folgenden Tabelle sind $S_2(\mathcal{R})$ und $C_2(\mathcal{R})$ einiger irreduzibler Darstellungen verschiedener Lie-Gruppen aufgelistet.

\mathcal{R}	$S_2(\mathcal{R})$	$C_2(\mathcal{R})$	\mathcal{R}	$S_2(\mathcal{R})$	$C_2(\mathcal{R})$	\mathcal{R}	$S_2(\mathcal{R})$	$C_2(\mathcal{R})$
10	1	9/2	4	1/2	15/8	3	1/2	4/3
16	2	45/8	6	1	5/2	6	5/2	10/3
45	8	8	10	3	9/2	8	3	3
54	12	10	15	4	4	10	15/2	6
120	28	21/2	20	13/2	39/8	15	10	16/3
126	35	25/2	20'	8	6			
144	34	85/8						
210	56	12						
210'	77	33/2						

Tabelle A.1: Dynkin-Indizes $S_2(\mathcal{R})$ und Eigenwerte $C_2(\mathcal{R})$ des quadratischen Casimir-Operators für ausgewählte irreduzible Darstellungen \mathcal{R} der einfachen Lie-Gruppen $SO(10)$, $SU(4)$ und $SU(3)$ (von links nach rechts)

A.2 Verzweigungsregeln für $SO(10)$ -Darstellungen

$$SO(10) \supset SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$$

$$\mathbf{10} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{16} = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{45} = (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{54} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{20}', \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{120} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$$

$$\oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{126} = (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{210} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$$

$$\oplus (\mathbf{10}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (\text{A.11})$$

A.3 Verzweigungsregeln für $SU(4)$ -Darstellungen

$$SU(4)_C \supset SU(3)_C \otimes U(1)_{B-L}$$

$$\mathbf{4} = \mathbf{1}_{-1} \oplus \mathbf{3}_{1/3} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{6} = \mathbf{3}_{-2/3} \oplus \bar{\mathbf{3}}_{2/3} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{10} = \mathbf{1}_{-2} \oplus \mathbf{3}_{-2/3} \oplus \mathbf{6}_{2/3} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{15} = \mathbf{1}_0 \oplus \mathbf{3}_{4/3} \oplus \bar{\mathbf{3}}_{-4/3} \oplus \mathbf{8}_0 \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{20} = \mathbf{3}_{1/3} \oplus \bar{\mathbf{3}}_{5/3} \oplus \bar{\mathbf{6}}_{1/3} \oplus \mathbf{8}_{-1} \quad (\text{A.16})$$

A.4 Schwellenkorrektur-Koeffizienten

Hier ist zu berücksichtigen, daß die $SO(10)$ -Darstellungen **210** und **54** als reell, die an der Massenerzeugung beteiligten Darstellungen **10**, **120** und **126** dagegen als komplex angenommen werden. Hat die Darstellung einer Produktgruppe $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ die Gestalt $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$, so sind die zugehörigen Schwellenkorrektur-Koeffizienten durch

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (d(\mathcal{R}_2) d(\mathcal{R}_3) S_2(\mathcal{R}_1), d(\mathcal{R}_1) d(\mathcal{R}_3) S_2(\mathcal{R}_2), d(\mathcal{R}_1) d(\mathcal{R}_2) S_2(\mathcal{R}_3)) \quad (\text{A.17})$$

gegeben. Bei komplexen Darstellungen kommt noch ein Faktor 2 hinzu.

Für die Berechnung der λ_{1Y}^I ist die korrekte GUT-Normierung der Hyperladung verwendet worden, was die $\sqrt{3/5}$ -Faktoren erklärt.

$SO(10)$ -Darstellung	G_{PS} -Darstellung	$(\lambda_{4C}^U, \lambda_{2L}^U, \lambda_{2R}^U)$
210	(1,1,1)	(0,0,0)
	(15,1,1)	(4,0,0)
	(6,2,2)	(4,6,6)
	(15,3,1)	(12,30,0)
	(15,1,3)	(12,0,30)
	(10,2,2)	(12,10,10)
	($\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{2}, \mathbf{2}$)	(12,10,10)
54	(1,1,1)	(0,0,0)
	(1,3,3)	(0,6,6)
	(20',1,1)	(8,0,0)
	(6,2,2)	(4,6,6)
126	(6,1,1)	(2,0,0)
	($\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}$)	(18,40,0)
	(10,1,3)	(18,0,40)
	(15,2,2)	(32,30,30)
120	(1,2,2)	(0,2,2)
	(10,1,1)	(6,0,0)
	($\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}$)	(6,0,0)
	(6,3,1)	(6,24,0)
	(6,1,3)	(6,0,24)
	(15,2,2)	(32,30,30)
10	(1,2,2)	(0,2,2)
	(6,1,1)	(2,0,0)

Tabelle A.2: Koeffizienten für Schwellenkorrekturen durch Higgs-Teilchen bei M_U

G_{PS} -Darstellung	G_{SM} -Darstellung	$(\lambda_{3C}^I, \lambda_{2L}^I, \lambda_{1Y}^I)$
$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2\sqrt{3/5})$	$(0, 1, 3/5)$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2\sqrt{3/5})$	$(0, 1, 3/5)$
$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2\sqrt{3/5})$	$(0, 1, 3/5)$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2\sqrt{3/5})$	$(0, 1, 3/5)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +7/6\sqrt{3/5})$	$(2, 3, 49/5)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6\sqrt{3/5})$	$(2, 3, 1/5)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -1/6\sqrt{3/5})$	$(2, 3, 1/5)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -7/6\sqrt{3/5})$	$(2, 3, 49/5)$
	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}, +1/2\sqrt{3/5})$	$(12, 8, 24/5)$
	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}, -1/2\sqrt{3/5})$	$(12, 8, 24/5)$
$(\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, +\sqrt{3/5})$	$(0, 4, 18/5)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, +1/3\sqrt{3/5})$	$(3, 12, 6/5)$
	$(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{3}, -1/3\sqrt{3/5})$	$(15, 24, 12/5)$
$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	$(0, 0, 0)$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\sqrt{3/5})$	$(0, 0, 6/5)$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2\sqrt{3/5})$	$(0, 0, 24/5)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, +2/3\sqrt{3/5})$	$(1, 0, 8/5)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3\sqrt{3/5})$	$(1, 0, 2/5)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -4/3\sqrt{3/5})$	$(1, 0, 32/5)$
	$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, +4/3\sqrt{3/5})$	$(5, 0, 64/5)$
	$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, +1/3\sqrt{3/5})$	$(5, 0, 4/5)$
	$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, -2/3\sqrt{3/5})$	$(5, 0, 16/5)$

Tabelle A.3: Koeffizienten für Schwellenkorrekturen durch Higgs-Teilchen bei M_I

Anhang B

Renormierungsgruppengleichungen

In [110] sind allgemeine Ausdrücke für die Renormierungsgruppengleichungen von Quantenfeldtheorien in Zweischleifenordnung entwickelt worden, aus denen sich auch die hier verwendeten Gleichungen herleiten lassen. Die Renormierungsgruppengleichungen für das Standardmodell sind in [23] und die der See-Saw-Massenmatrix der Neutrinos in [111] ausführlich analysiert worden.

B.1 Standardmodell

Alle Gleichungen bis auf die der See-Saw-Massenmatrix sind in Zweischleifenordnung angegeben. Als Variable wird im folgenden $t = \ln(\mu/M_Z)$ verwendet, n_H gibt die Anzahl der komplexen Higgs-Doublets an (in dieser Arbeit wird stets $n_H = 1$ angenommen). Die Definition der Yukawa-Kopplungsmatrizen lautet

$$\mathbf{Y}_i(\mu) = \frac{\sqrt{2}}{v} \mathbf{M}_i(\mu) \quad (i = u, d, e) , \quad (\text{B.1})$$

wobei $\mathbf{M}_i(\mu)$ die skalenabhängigen fermionischen Massenmatrizen bezeichnet; $v/\sqrt{2} = 174.1$ GeV ist der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes. Desweiteren werden die nachfolgend aufgeführten Definitionen benutzt:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^\dagger \quad (i = u, d, e) \quad (\text{B.2})$$

$$Y_2 = \text{Tr}(3 \mathbf{H}_u + 3 \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_e) \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_u) \\ &+ \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_d) \\ &+ \left(\frac{3}{4} g_1^2 + \frac{3}{4} g_2^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_e) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$H_2 = \text{Tr}(3 \mathbf{H}_u^2 + 3 \mathbf{H}_d^2 + \mathbf{H}_e^2) \quad (\text{B.5})$$

$$\chi_4 = \frac{9}{4} \text{Tr}(3 \mathbf{H}_u^2 + 3 \mathbf{H}_d^2 + \mathbf{H}_e^2 - \frac{2}{3} \mathbf{H}_u \mathbf{H}_d) \quad (\text{B.6})$$

B.1.1 Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \alpha_1 &= -\frac{1}{2\pi} \left(-4 - \frac{1}{10} n_H \right) \alpha_1^2 \\
&\quad - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-\frac{19}{5} - \frac{9}{50} n_H \right) \alpha_1 + \left(-\frac{9}{5} - \frac{9}{10} n_H \right) \alpha_2 + \left(-\frac{44}{5} \right) \alpha_3 \right] \alpha_1^2 \\
&\quad - \frac{1}{32\pi^3} \text{Tr} \left(\frac{17}{10} \mathbf{H}_u + \frac{1}{2} \mathbf{H}_d + \frac{3}{2} \mathbf{H}_e \right) \alpha_1^2
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \alpha_2 &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6} n_H \right) \alpha_2^2 \\
&\quad - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-\frac{3}{5} - \frac{3}{10} n_H \right) \alpha_1 + \left(-\frac{11}{3} - \frac{13}{6} n_H \right) \alpha_2 + (-12) \alpha_3 \right] \alpha_2^2 \\
&\quad - \frac{1}{32\pi^3} \text{Tr} \left(\frac{3}{2} \mathbf{H}_u + \frac{3}{2} \mathbf{H}_d + \frac{1}{2} \mathbf{H}_e \right) \alpha_2^2
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \alpha_3 &= -\frac{1}{2\pi} 7 \alpha_3^2 \\
&\quad - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-\frac{11}{10} \right) \alpha_1 + \left(-\frac{9}{2} \right) \alpha_2 + 26 \alpha_3 \right] \alpha_3^2 \\
&\quad - \frac{1}{32\pi^3} \text{Tr} (2 \mathbf{H}_u + 2 \mathbf{H}_d) \alpha_3^2
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.1.2 Renormierungsgruppengleichungen für die Yukawa-Matrizen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}_i = \left(\frac{1}{16\pi^2} \beta_i^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_i^{(2)} \right) \mathbf{Y}_i \quad (i = u, d, e) \tag{B.10}$$

$$\beta_u^{(1)} = \frac{3}{2} (\mathbf{H}_u - \mathbf{H}_d) + Y_2 - \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) \tag{B.11}$$

$$\beta_d^{(1)} = \frac{3}{2} (\mathbf{H}_d - \mathbf{H}_u) + Y_2 - \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) \tag{B.12}$$

$$\beta_e^{(1)} = \frac{3}{2} \mathbf{H}_e + Y_2 - \left(\frac{9}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 \right) \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\beta_u^{(2)} &= \frac{3}{2} \mathbf{H}_u^2 - \mathbf{H}_u \mathbf{H}_d - \frac{1}{4} \mathbf{H}_d \mathbf{H}_u + \frac{11}{4} \mathbf{H}_d^2 + Y_2 \left(\frac{5}{4} \mathbf{H}_d - \frac{9}{4} \mathbf{H}_u \right) - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 \\
&\quad - 2 \lambda (3 \mathbf{H}_u + \mathbf{H}_d) + \left(\frac{223}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16 g_3^2 \right) \mathbf{H}_u - \left(\frac{43}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16 g_3^2 \right) \mathbf{H}_d \\
&\quad + \frac{5}{2} Y_4 + \frac{1187}{600} g_1^4 - \frac{9}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{19}{15} g_1^2 g_3^2 - \frac{23}{4} g_2^4 + 9 g_2^2 g_3^2 - 108 g_3^4
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\beta_d^{(2)} &= \frac{3}{2} \mathbf{H}_d^2 - \mathbf{H}_d \mathbf{H}_u - \frac{1}{4} \mathbf{H}_u \mathbf{H}_d + \frac{11}{4} \mathbf{H}_u^2 + Y_2 \left(\frac{5}{4} \mathbf{H}_u - \frac{9}{4} \mathbf{H}_d \right) - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 \\
&\quad - 2 \lambda (3 \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_u) + \left(\frac{187}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16 g_3^2 \right) \mathbf{H}_d - \left(\frac{79}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16 g_3^2 \right) \mathbf{H}_u \\
&\quad + \frac{5}{2} Y_4 - \frac{127}{600} g_1^4 - \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{31}{15} g_1^2 g_3^2 - \frac{23}{4} g_2^4 + 9 g_2^2 g_3^2 - 108 g_3^4
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\beta_e^{(2)} &= \frac{3}{2} \mathbf{H}_e^2 - \frac{9}{4} Y_2 \mathbf{H}_e - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 - 6 \lambda \mathbf{H}_e + \left(\frac{387}{80} g_1^2 + \frac{135}{15} g_2^2 \right) \mathbf{H}_e + \frac{5}{2} Y_4 \\
&\quad + \frac{1371}{200} g_1^4 + \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 - \frac{23}{4} g_2^4
\end{aligned} \tag{B.16}$$

B.1.3 Renormierungsgruppengleichung für die Higgs-Selbstkopplung

$$\frac{d}{dt} \lambda = \left(\frac{1}{16\pi^2} \beta_\lambda^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_\lambda^{(2)} \right) \lambda \quad (\text{B.17})$$

$$\beta_\lambda^{(1)} = 12 \lambda^2 - \left(\frac{9}{5} g_1^2 + 9 g_2^2 \right) \lambda + \frac{9}{4} \left(\frac{3}{25} g_1^4 + \frac{2}{5} g_1^2 g_2^2 + g_2^4 \right) + 4 Y_2 \lambda - 4 H_2 \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \beta_\lambda^{(2)} = & -78 \lambda^3 + 18 \left(\frac{3}{5} g_1^2 + 3 g_2^2 \right) \lambda^2 - \left(\frac{2661}{100} g_1^4 - \frac{117}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{73}{8} g_2^4 \right) \lambda \\ & - \frac{3411}{1000} g_1^6 - \frac{1677}{200} g_1^4 g_2^2 - \frac{289}{40} g_1^2 g_2^4 + \frac{305}{8} g_2^6 - 64 g_3^2 \text{Tr}(\mathbf{H}_u^2 + \mathbf{H}_d^2) \\ & - \frac{8}{5} g_1^2 \text{Tr}(2 \mathbf{H}_u^2 - \mathbf{H}_d^2 + 3 \mathbf{H}_e^2) - \frac{3}{2} g_2^4 Y_2 + 10 \lambda Y_4 \\ & + \frac{3}{5} g_1^2 \left[\left(-\frac{57}{10} g_1^2 + 21 g_2^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_u) + \left(\frac{3}{2} g_1^2 + 9 g_2^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_d) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{15}{2} g_1^2 + 11 g_2^2 \right) \text{Tr}(\mathbf{H}_e) \right] - 24 \lambda^2 Y_2 - \lambda H_2 + 6 \lambda \text{Tr}(\mathbf{H}_u \mathbf{H}_d) \\ & + 20 \text{Tr}(3 \mathbf{H}_u^3 + 3 \mathbf{H}_d^3 + \mathbf{H}_e^3 - 12 \text{Tr}(\mathbf{H}_u^2 \mathbf{H}_d) - 12 \text{Tr}(\mathbf{H}_u \mathbf{H}_d^2)) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.1.4 Renormierungsgruppengleichung für die See-Saw-Massenmatrix

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \mathbf{M}_\nu = (2 \lambda - 3 g_2^2 + 2 Y_2) \mathbf{M}_\nu - \frac{1}{2} (\mathbf{M}_\nu \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_e^T \mathbf{M}_\nu) \quad (\text{B.20})$$

B.2 $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R [\otimes D]$ -Modell

Die Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen hängen vom Higgs-Teilcheninhalt des betrachteten Modells ab, das heißt von Anzahl und Art der Darstellungen, in welchen Higgs-Teilchen mit Massen der Größenordnung $\lesssim M_I$ liegen. Folgende Variablen spezifizieren diesen Teilcheninhalt:

$$\begin{aligned} N_1 &= \text{Anzahl der } (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{10/120} \\ N_{15} &= \text{Anzahl der } (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{120/126} \\ \Delta_L &= \text{Anzahl der } (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})_{126} \\ \Delta_R &= \text{Anzahl der } (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})_{126} \end{aligned}$$

Dann haben die Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen in Zweischleifenordnung die folgende Gestalt, wobei Beiträge durch die Yukawakopplungen der Fermionen vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_{4C} = & -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3} N_{15} - 3 \Delta_L - 3 \Delta_R \right) \alpha_{4C}^2 \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-\frac{9}{2} - 48 N_{15} - 72 \Delta_L \right) \alpha_{2L} \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{9}{2} - 48 N_{15} - 72 \Delta_R \right) \alpha_{2R} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{473}{6} - \frac{896}{3} N_{15} - 186 \Delta_L - 186 \Delta_R \right) \alpha_{4C} \right] \alpha_{4C}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \alpha_{2L} = & -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3} N_1 - 5 N_{15} - \frac{20}{3} \Delta_L \right) \alpha_{2L}^2 \\
& - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-\frac{11}{3} - \frac{13}{3} N_1 - 65 N_{15} - \frac{560}{3} \Delta_L \right) \alpha_{2L} \right. \\
& \quad + \left(-3 N_1 - 45 N_{15} \right) \alpha_{2R} \\
& \quad \left. + \left(-\frac{45}{2} - 240 N_{15} - 360 \Delta_L \right) \alpha_{4C} \right] \alpha_{2L}^2 \quad (B.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \alpha_{2R} = & -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3} N_1 - 5 N_{15} - \frac{20}{3} \Delta_R \right) \alpha_{2R}^2 \\
& - \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(-3 N_1 - 45 N_{15} \right) \alpha_{2L} \right. \\
& \quad + \left(-\frac{11}{3} - \frac{13}{3} N_1 - 65 N_{15} - \frac{560}{3} \Delta_R \right) \alpha_{2R} \\
& \quad \left. + \left(-\frac{45}{2} - 240 N_{15} - 360 \Delta_R \right) \alpha_{4C} \right] \alpha_{2R}^2 \quad (B.23)
\end{aligned}$$

Anhang C

Symmetriebrechungsskalen und Eichkopplungen

Die verwendeten Startwerte für die Integration der Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen sind in Tabelle C.1 zusammengefaßt.

Größe	M_Z	$\alpha_1(M_Z)$	$\alpha_2(M_Z)$	$\alpha_3(M_Z)$
Wert	91.187 GeV	$(59.45)^{-1}$	$(29.80)^{-1}$	$(8.40)^{-1}$

Tabelle C.1: Verwendete Startwerte für M_Z und die Eichkopplungen bei $\mu = M_Z$

C.1 $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$ -Modell

Wie in Abschnitt 4.1.2 erläutert wurde, hängen der Wert von M_I und somit die Eichkopplungen bei $\mu = M_I$ nicht vom Teilcheninhalt des Modells zwischen M_U und M_I ab; Tabelle C.2 gibt die Werte dieser Größen an.

Größe	M_I	$\alpha_1(M_I)$	$\alpha_2(M_I)$	$\alpha_3(M_I)$	$\alpha_{2R,L}(M_I)$	$\alpha_{4C}(M_I)$
Wert	$5.66 \cdot 10^{13}$ GeV	$(41.51)^{-1}$	$(43.26)^{-1}$	$(39.05)^{-1}$	$(43.26)^{-1}$	$(39.08)^{-1}$

Tabelle C.2: Werte für M_I und die Eichkopplungen bei $\mu = M_I$ im $G_{PS} \otimes D$ -Modell

Die vom Teilchenspektrum abhängigen Werte für M_U und $\alpha_U(M_U)$ sind für die untersuchten Fälle in Tabelle C.3 aufgelistet.

C.2 $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Modell

Im Gegensatz zum $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D$ -Modell hängen in Theorien mit G_{PS} als Symmetriegruppe auch M_I und die Eichkopplungen bei der Skala $\mu = M_I$ vom Higgs-

Größe	Wert	Wert	Wert	Wert	Wert
N_1	1	2	3	4	5
N_{15}	1	1	1	1	1
M_U [GeV]	$1.46 \cdot 10^{15}$	$1.28 \cdot 10^{15}$	$1.13 \cdot 10^{15}$	$1.01 \cdot 10^{15}$	$9.12 \cdot 10^{14}$
$\alpha_U(M_U)$	$(37.95)^{-1}$	$(38.01)^{-1}$	$(38.05)^{-1}$	$(38.10)^{-1}$	$(38.14)^{-1}$

Größe	Wert	Wert	Wert	Wert	Wert
N_1	1	2	3	4	5
N_{15}	2	2	2	2	2
M_U [GeV]	$1.75 \cdot 10^{15}$	$1.51 \cdot 10^{15}$	$1.32 \cdot 10^{15}$	$1.16 \cdot 10^{15}$	$1.04 \cdot 10^{15}$
$\alpha_U(M_U)$	$(34.47)^{-1}$	$(34.67)^{-1}$	$(34.87)^{-1}$	$(35.04)^{-1}$	$(35.20)^{-1}$

Größe	Wert	Wert	Wert	Wert	Wert
N_1	1	2	3	4	5
N_{15}	3	3	3	3	3
M_U [GeV]	$2.14 \cdot 10^{15}$	$1.81 \cdot 10^{15}$	$1.56 \cdot 10^{15}$	$1.36 \cdot 10^{15}$	$1.20 \cdot 10^{15}$
$\alpha_U(M_U)$	$(30.50)^{-1}$	$(30.91)^{-1}$	$(31.28)^{-1}$	$(31.62)^{-1}$	$(31.93)^{-1}$

Tabelle C.3: M_U und $\alpha_U(M_U)$ im $G_{\text{PS}} \otimes D$ -Modell in Abhängigkeit vom Higgs-Spektrum

Spektrum ab. In Modellen mit $N_{15} = 3$ und $N_1 = 1, \dots, 5$ sowie $N_{15} = 2$ und $N_1 = 1, 2, 3$ findet keine Vereinheitlichung statt, für die übrigen Fälle finden sich in Tabelle C.4 die Werte der relevanten Größen:

Größe	Wert	Wert	Wert	Wert
N_1	1	2	3	4
N_{15}	1	1	1	1
M_I	$1.70 \cdot 10^{10}$ GeV	$7.25 \cdot 10^{10}$ GeV	$1.94 \cdot 10^{11}$ GeV	$3.99 \cdot 10^{11}$ GeV
$\alpha_1(M_I)$	$(46.85)^{-1}$	$(45.89)^{-1}$	$(45.24)^{-1}$	$(44.77)^{-1}$
$\alpha_2(M_I)$	$(39.22)^{-1}$	$(39.94)^{-1}$	$(40.43)^{-1}$	$(40.79)^{-1}$
$\alpha_3(M_I)$	$(29.95)^{-1}$	$(31.58)^{-1}$	$(32.69)^{-1}$	$(33.49)^{-1}$
$\alpha_{2R}(M_I)$	$(58.22)^{-1}$	$(55.54)^{-1}$	$(53.72)^{-1}$	$(52.40)^{-1}$
$\alpha_{2L}(M_I)$	$(39.22)^{-1}$	$(39.94)^{-1}$	$(40.43)^{-1}$	$(40.79)^{-1}$
$\alpha_{4C}(M_I)$	$(29.98)^{-1}$	$(31.61)^{-1}$	$(32.71)^{-1}$	$(33.52)^{-1}$
M_U	$6.01 \cdot 10^{16}$ GeV	$1.83 \cdot 10^{16}$ GeV	$8.05 \cdot 10^{15}$ GeV	$4.37 \cdot 10^{15}$ GeV
$\alpha_U(M_U)$	$(32.37)^{-1}$	$(33.69)^{-1}$	$(34.57)^{-1}$	$(35.19)^{-1}$

Größe	Wert	Wert	Wert
N_1	5	4	5
N_{15}	1	2	2
M_I	$6.94 \cdot 10^{11}$ GeV	$6.14 \cdot 10^{10}$ GeV	$2.09 \cdot 10^{11}$ GeV
$\alpha_1(M_I)$	$(44.41)^{-1}$	$(46.00)^{-1}$	$(45.20)^{-1}$
$\alpha_2(M_I)$	$(41.07)^{-1}$	$(39.86)^{-1}$	$(40.47)^{-1}$
$\alpha_3(M_I)$	$(34.12)^{-1}$	$(31.39)^{-1}$	$(32.77)^{-1}$
$\alpha_{2R}(M_I)$	$(51.37)^{-1}$	$(55.85)^{-1}$	$(53.59)^{-1}$
$\alpha_{2L}(M_I)$	$(41.07)^{-1}$	$(39.86)^{-1}$	$(40.47)^{-1}$
$\alpha_{4C}(M_I)$	$(34.14)^{-1}$	$(31.42)^{-1}$	$(32.80)^{-1}$
M_U	$2.72 \cdot 10^{15}$ GeV	$1.31 \cdot 10^{16}$ GeV	$5.68 \cdot 10^{15}$ GeV
$\alpha_U(M_U)$	$(35.65)^{-1}$	$(20.08)^{-1}$	$(23.76)^{-1}$

Tabelle C.4: Symmetriebrechungsskalen und Eichkopplungen im G_{PS} -Modell in Abhängigkeit vom Higgs-Spektrum

Anhang D

Eigenschaften der untersuchten Lösungen

D.1 Massenmatrizen, Massen und Mischungswinkel bei M_t

Tabelle D.1 gibt für die drei Beispielmmodelle aus Abschnitt 4.4 die nichtverschwindenden Einträge der Massenmatrizen der geladenen Fermionen sowie deren Massen und Mischungswinkel bei M_t an, wobei für die Mischungsmatrizen die Parametrisierung (1.34) benutzt wird. In Tabelle D.2 sind die nichtverschwindenden Elemente der Dirac-, Majorana- und See-Saw-Massenmatrizen sowie Massen und Mischungen der leichten Neutrinos zusammengefaßt.

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(\mathbf{M}_u)_{12}$	-198.37 MeV	-173.83 MeV	91.71 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{21}$	1.98 MeV	2.26 MeV	-4.29 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{23}$	-5539.4 MeV	-5617.2 MeV	-7532.3 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{32}$	4993.8 MeV	5216.5 MeV	4365.4 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{33}$	100940 MeV	100920 MeV	100840 MeV
m_u	1.16 MeV	1.16 MeV	1.16 MeV
m_c	337.6 MeV	337.6 MeV	337.6 MeV
m_t	101210 MeV	101210 MeV	101210 MeV
$\theta_{L12}^{(u)}$	-0.627	-0.540	0.275
$\theta_{L23}^{(u)}$	-0.055	-0.055	-0.074
$\theta_{L31}^{(u)}$	0.000	0.000	0.000
$\theta_{R12}^{(u)}$	0.005	0.006	-0.012
$\theta_{R23}^{(u)}$	0.049	0.051	0.043
$\theta_{R31}^{(u)}$	0.000	0.000	0.000

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(\mathbf{M}_d)_{12}$	−33.66 MeV	−28.18 MeV	29.23 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{21}$	6.03 MeV	7.57 MeV	−4.98 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{23}$	−52.06 MeV	−52.43 MeV	−65.87 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{32}$	1128.6 MeV	1152.5 MeV	854.63 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{33}$	757.26 MeV	720.50 MeV	1056.1 MeV
m_d	2.38 MeV	2.38 MeV	2.38 MeV
m_s	47.4 MeV	47.4 MeV	47.4 MeV
m_b	1360 MeV	1360 MeV	1360 MeV
$\theta_{L12}^{(d)}$	−0.404	−0.317	0.498
$\theta_{L23}^{(d)}$	−0.021	−0.020	−0.038
$\theta_{L31}^{(d)}$	−0.021	−0.018	0.014
$\theta_{R12}^{(d)}$	0.117	0.152	−0.092
$\theta_{R23}^{(d)}$	0.979	1.012	0.679
$\theta_{R31}^{(d)}$	0.000	0.000	0.000
$(\mathbf{M}_e)_{12}$	−1.99 MeV	−2.27 MeV	2.05 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{21}$	37.70 MeV	33.47 MeV	−32.16 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{23}$	1232.3 MeV	−151.09 MeV	−193.32 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{32}$	−155.77 MeV	1251.2 MeV	982.07 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{33}$	1359.0 MeV	1342.2 MeV	1545.4 MeV
m_e	0.513 MeV	0.513 MeV	0.513 MeV
m_μ	108.14 MeV	108.14 MeV	108.14 MeV
m_τ	1838.3 MeV	1838.3 MeV	1838.3 MeV
$\theta_{L12}^{(e)}$	−0.018	−0.015	0.015
$\theta_{L23}^{(e)}$	0.733	−0.060	−0.089
$\theta_{L31}^{(e)}$	0.000	−0.001	0.001
$\theta_{R12}^{(e)}$	0.262	0.314	−0.301
$\theta_{R23}^{(e)}$	−0.063	0.747	0.561
$\theta_{R31}^{(e)}$	0.014	−0.001	0.002

Tabelle D.1: Massenmatrixelemente, Massen und Mischungswinkel der geladenen Fermionen bei M_I

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{12}$	−2184.0 MeV	−1459.5 MeV	1617.7 MeV
$(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{21}$	−1983.7 MeV	−1283.5 MeV	1521.7 MeV
$(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23}$	8260.6 MeV	31082.8 MeV	32167.7 MeV
$(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32}$	−8806.2 MeV	−31483.5 MeV	−35334.6 MeV
$(\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{33}$	63207.4 MeV	70062.5 MeV	73367.5 MeV
$(\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})_{12}$	$y_1 M_R$	$y_1 M_R$	$y_1 M_R$
$(\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})_{21}$	$y_1 M_R$	$y_1 M_R$	$y_1 M_R$
$(\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})})_{33}$	$19 y_1 M_R$	$24 y_1 M_R$	$−18 y_1 M_R$
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{12,21}$	−0.0706 eV	−0.0305 eV	−0.0401 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{22}$	−0.0585 eV	−0.656 eV	0.936 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{23,32}$	−0.732 eV	−2.136 eV	3.011 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{33}$	−3.425 eV	−3.331 eV	4.870 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_1}$	−0.0365 eV	−0.0013 eV	0.0017 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_2}$	0.130 eV	0.528 eV	−0.695 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_3}$	−3.577 eV	−4.514 eV	6.500 eV
$\theta_{12}^{(\nu)}$	−0.487	−0.050	0.051
$\theta_{23}^{(\nu)}$	0.205	0.506	0.496
$\theta_{31}^{(\nu)}$	0.004	0.003	−0.003
m_{ν_2}/m_{ν_1}	−3.57	−406.2	−401.2
m_{ν_3}/m_{ν_2}	−27.42	−8.54	−9.35
$\left(\frac{m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2}{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2}\right)$	815.1	72.0	86.4

Tabelle D.2: Dirac-, Majorana- und See-Saw-Massenmatrixelemente sowie Massen und Mischungswinkel der leichten Neutrinos bei M_I

D.2 $SO(10)$ -Higgs-Parameter bei M_I

Tabelle D.3 faßt für die betrachteten Lösungen die numerischen Werte der $SO(10)$ -Higgs-Parameter aus (4.63-4.82) zusammen.

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$x_1 v_d^{(1)}$	−5.90 MeV	−3.83 MeV	5.33 MeV
$y_1 \omega_d^{(1)}$	−7.92 MeV	−6.48 MeV	6.79 MeV
$z_1 \tilde{v}_d^{(1)}$	−19.84 MeV	−17.87 MeV	17.10 MeV
$\tilde{x}_1 v_d^{(1)}$	907.69 MeV	875.94 MeV	1178.45 MeV
$\tilde{y}_1 \omega_d^{(1)}$	−150.42 MeV	−155.43 MeV	−122.31 MeV
$x_2 v_d^{(2)}$	538.27 MeV	550.05 MeV	394.38 MeV
$z_2 \tilde{v}_d^{(2)}$	−269.23 MeV	−627.14 MeV	−492.11 MeV
$z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)}$	−321.09 MeV	24.67 MeV	31.86 MeV
$x_1 v_u^{(1)}$	−594.61 MeV	−407.21 MeV	425.21 MeV
$y_1 \omega_u^{(1)}$	496.42 MeV	321.43 MeV	−381.50 MeV
$z_1 \tilde{v}_u^{(1)}$	−100.18 MeV	−88.05 MeV	48.00 MeV
$\tilde{x}_1 v_u^{(1)}$	91503.26 MeV	93205.41 MeV	93968.44 MeV
$\tilde{y}_1 \omega_u^{(1)}$	9431.94 MeV	7714.29 MeV	6866.97 MeV
$x_2 v_u^{(2)}$	−272.82 MeV	−200.35 MeV	−1583.48 MeV
$z_2 \tilde{v}_u^{(2)}$	−1816.59 MeV	3758.17 MeV	3976.16 MeV
$z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)}$	−3450 MeV	−9175 MeV	−9925 MeV
\tilde{x}_1/x_1	−153.89	−228.89	220.99
\tilde{y}_1/y_1	19	24	−18

Tabelle D.3: $SO(10)$ -Higgs-Parameter bei M_I für die untersuchten Modelle

D.3 Massenmatrizen, Massen und Mischungswinkel bei M_Z

Tabelle D.4 gibt für die drei untersuchten Modelle die Einträge der Massenmatrizen der geladenen Fermionen und der leichten Neutrinos sowie deren Massen und Mischungswinkel bei M_Z an.

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(\mathbf{M}_u)_{11}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{12}$	-397.86 MeV	-348.64 MeV	183.95 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{13}$	1.94 MeV	1.78 MeV	-0.76 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{21}$	3.98 MeV	4.54 MeV	-8.61 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{22}$	56.66 MeV	60.01 MeV	67.28 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{23}$	-9964.3 MeV	-10104 MeV	-13548 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{31}$	0.02 MeV	0.03 MeV	-0.07 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{32}$	8927.8 MeV	9326.1 MeV	7806.8 MeV
$(\mathbf{M}_u)_{33}$	180390 MeV	180360 MeV	180210 MeV
m_u	2.33 MeV	2.33 MeV	2.33 MeV
m_c	677.2 MeV	677.2 MeV	677.2 MeV
m_t	180885 MeV	180882 MeV	180886 MeV
$\theta_{L12}^{(u)}$	-0.627	-0.540	0.275
$\theta_{L23}^{(u)}$	-0.055	-0.056	-0.075
$\theta_{L31}^{(u)}$	0.000	0.000	0.000
$\theta_{R12}^{(u)}$	0.005	0.006	-0.012
$\theta_{R23}^{(u)}$	0.049	0.051	0.043
$\theta_{R31}^{(u)}$	0.000	0.000	0.000
$(\mathbf{M}_d)_{11}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{12}$	-66.32 MeV	-55.51 MeV	57.58 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{13}$	-0.02 MeV	-0.01 MeV	0.01 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{21}$	11.88 MeV	14.91 MeV	-9.81 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{22}$	-14.08 MeV	-14.58 MeV	-14.49 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{23}$	-112.01 MeV	-112.41 MeV	-147.71 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{31}$	-0.08 MeV	-0.10 MeV	0.08 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{32}$	2489.1 MeV	2541.8 MeV	1884.4 MeV
$(\mathbf{M}_d)_{33}$	1670.8 MeV	1589.7 MeV	2329.8 MeV
m_d	4.69 MeV	4.69 MeV	4.69 MeV
m_s	93.4 MeV	93.4 MeV	93.4 MeV
m_b	2999 MeV	2999 MeV	2999 MeV
$\theta_{L12}^{(d)}$	-0.404	-0.317	0.498
$\theta_{L23}^{(d)}$	-0.025	-0.024	-0.041
$\theta_{L31}^{(d)}$	-0.018	-0.016	0.012
$\theta_{R12}^{(d)}$	0.117	0.152	-0.092
$\theta_{R23}^{(d)}$	0.979	1.011	0.679
$\theta_{R31}^{(d)}$	0.000	0.000	0.000

Parameter	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
$(\mathbf{M}_e)_{11}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{12}$	-1.89 MeV	-2.16 MeV	1.95 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{13}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{21}$	35.83 MeV	31.82 MeV	-30.57 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{22}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{23}$	1171.3 MeV	-143.61 MeV	-183.75 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{31}$	0.00 MeV	0.00 MeV	0.00 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{32}$	-148.06 MeV	1189.2 MeV	933.45 MeV
$(\mathbf{M}_e)_{33}$	1291.7 MeV	1275.8 MeV	1468.9 MeV
m_e	0.488 MeV	0.488 MeV	0.488 MeV
m_μ	102.79 MeV	102.78 MeV	102.79 MeV
m_τ	1747.3 MeV	1747.3 MeV	1747.3 MeV
$\theta_{L12}^{(e)}$	-0.018	-0.015	0.015
$\theta_{L23}^{(e)}$	0.733	-0.060	-0.089
$\theta_{L31}^{(e)}$	0.000	-0.001	0.001
$\theta_{R12}^{(e)}$	0.262	0.314	-0.301
$\theta_{R23}^{(e)}$	-0.063	0.747	0.561
$\theta_{R31}^{(e)}$	0.014	-0.001	0.002
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{12,21}$	-0.0474 eV	-0.0205 eV	-0.0269 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{22}$	-0.0393 eV	-0.440 eV	0.629 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{23,32}$	-0.492 eV	-1.435 eV	2.022 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{33}$	-2.300 eV	-2.237 eV	3.271 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot (\mathbf{M}_\nu)_{11,13,31}$	0.000 eV	0.000 eV	0.000 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_1}$	-0.0245 eV	$-8.73 \cdot 10^{-4}$ eV	$1.16 \cdot 10^{-3}$ eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_2}$	0.0876 eV	0.355 eV	-0.467 eV
$(y_1 M_R/M_I) \cdot m_{\nu_3}$	-2.402 eV	-3.031 eV	4.365 eV
$\theta_{12}^{(\nu)}$	-0.487	-0.050	0.051
$\theta_{23}^{(\nu)}$	0.205	0.506	0.496
$\theta_{31}^{(\nu)}$	0.004	0.003	-0.003
m_{ν_2}/m_{ν_1}	-3.57	-406.3	-401.2
m_{ν_3}/m_{ν_2}	-27.43	-8.54	-9.35
$\left(\frac{m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2}{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2}\right)$	815.4	71.9	86.4

Tabelle D.4: Massenmatrixelemente, Massen und Mischungswinkel der geladenen Fermionen und der leichten Neutrinos bei M_Z

D.4 CKM-Matrix und leptonische Mischungsmatrix bei M_Z

Im folgenden werden die CKM-Matrix \mathbf{V} und die leptonische Mischungsmatrix \mathbf{U} für die in Abschnitt 4.4 analysierten Modelle angegeben.

Modell 1:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.9752 & 0.2212 & 0.0030 \\ -0.2211 & 0.9746 & 0.0352 \\ 0.0049 & -0.0350 & 0.9994 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.891 & -0.455 & -0.005 \\ 0.391 & 0.771 & -0.504 \\ 0.233 & 0.447 & 0.864 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Modell 2a:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.9752 & 0.2212 & 0.0030 \\ -0.2211 & 0.9746 & 0.0353 \\ 0.0049 & -0.0351 & 0.9994 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.999 & -0.039 & 0.012 \\ 0.026 & 0.844 & 0.536 \\ -0.031 & -0.535 & 0.844 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Modell 2b:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.9752 & 0.2211 & 0.0025 \\ -0.2211 & 0.9746 & 0.0355 \\ 0.0054 & -0.0352 & 0.9994 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.038 & -0.012 \\ -0.025 & 0.833 & 0.552 \\ 0.031 & -0.552 & 0.834 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Anhang E

Berechnung der Nukleonzerfallsraten

E.1 A_i -Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird die explizite Form der A_i -Koeffizienten dargestellt, welche in der effektiven Lagrangedichte (5.3) für die Nukleonenzerfälle auftreten. Hierbei sind $\tilde{G} = g_U^2/2M_{X,Y}^2$ und $\tilde{G}' = g_U^2/2M_{X',Y'}^2$, wobei $M_{X,Y}^2 = M_{X',Y'}^2 \approx M_U^2$ angenommen wird.

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &+ \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ A_2 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{11}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{21}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{31}(\mathbf{D}_R)_{31}) \\ &+ \tilde{G}' ((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{11}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{21}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{31}(\mathbf{U}_R)_{31}) \\ A_3 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{12}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{22}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{32}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &+ \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{12}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{22}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{32}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ A_4 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{12}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{22}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{32}(\mathbf{D}_R)_{31}) \\ &+ \tilde{G}' ((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{12}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{22}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{32}(\mathbf{U}_R)_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{11}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{21}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{31}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{11}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{21}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{31}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{14} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{12}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{22}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{32}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{12}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{22}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{32}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{15} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{16} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{12} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{22} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{32} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{12}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{22}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{32}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{17} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right)
\end{aligned}$$

E.2 Meson-Wellenfunktionen

Die Tabellen E.1 und E.2 geben die Spin-Flavour-Anteile der Wellenfunktionen für die pseudoskalaren beziehungsweise Vektormesonen an.

Meson	Masse (MeV)	Spin S	Wellenfunktion
π^+	139.570	0	$-1/\sqrt{2} (d^C \uparrow u \downarrow - d^C \downarrow u \uparrow)$
π^0	134.976	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow - u^C \downarrow u \uparrow - d^C \uparrow d \downarrow + d^C \downarrow d \uparrow)$
π^-	139.570	0	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow d \downarrow - u^C \downarrow d \uparrow)$
K^+	493.677	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow u \downarrow - s^C \downarrow u \uparrow)$
K^0	497.672	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow d \downarrow - s^C \downarrow d \uparrow)$
η	547.30	0	$1/\sqrt{12} (u^C \uparrow u \downarrow - u^C \downarrow u \uparrow + d^C \uparrow d \downarrow - d^C \downarrow d \uparrow - 2 s^C \uparrow s \downarrow + 2 s^C \downarrow s \uparrow)$

Tabelle E.1: Wellenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen (Massenwerte aus [7])

Meson	Masse (MeV)	Spin S	S_z	Wellenfunktion
$\rho_{(+)}^+$	770.0	1	+1	$-d^C \uparrow u \uparrow$
$\rho_{(0)}^+$	770.0	1	0	$-1/\sqrt{2} (d^C \uparrow u \downarrow + d^C \downarrow u \uparrow)$
$\rho_{(-)}^+$	770.0	1	-1	$-d^C \downarrow u \downarrow$
$\rho_{(+)}^0$	770.0	1	+1	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow u \uparrow - d^C \uparrow d \uparrow)$
$\rho_{(0)}^0$	770.0	1	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow + u^C \downarrow u \uparrow - d^C \uparrow d \downarrow - d^C \downarrow d \uparrow)$
$\rho_{(-)}^0$	770.0	1	-1	$1/\sqrt{2} (u^C \downarrow u \downarrow - d^C \downarrow d \downarrow)$
$\rho_{(+)}^-$	770.0	1	+1	$u^C \uparrow d \uparrow$
$\rho_{(0)}^-$	770.0	1	0	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow d \downarrow + u^C \downarrow d \uparrow)$
$\rho_{(-)}^-$	770.0	1	-1	$u^C \downarrow d \downarrow$
$\omega_{(+)}$	781.94	1	+1	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow u \uparrow + d^C \uparrow d \uparrow)$
$\omega_{(0)}$	781.94	1	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow + u^C \downarrow u \uparrow + d^C \uparrow d \downarrow + d^C \downarrow d \uparrow)$
$\omega_{(-)}$	781.94	1	-1	$1/\sqrt{2} (u^C \downarrow u \downarrow + d^C \downarrow d \downarrow)$
$K_{(+)}^{*+}$	891.66	1	+1	$s^C \uparrow u \uparrow$
$K_{(0)}^{*+}$	891.66	1	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow u \downarrow + s^C \downarrow u \uparrow)$
$K_{(-)}^{*+}$	891.66	1	-1	$s^C \downarrow u \downarrow$
$K_{(+)}^{*0}$	896.1	1	+1	$s^C \uparrow d \uparrow$
$K_{(0)}^{*0}$	896.1	1	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow d \downarrow + s^C \downarrow d \uparrow)$
$K_{(-)}^{*0}$	896.1	1	-1	$s^C \downarrow d \downarrow$

Tabelle E.2: Wellenfunktionen der Vektormesonen (Massenwerte aus [7])

E.3 Phasenraumfaktoren

Die Phasenraumfaktoren, welche die $SU(6)$ -Spin-Flavour-Symmetrie des in Abschnitt 5.2 verwendeten nichtrelativistischen Quark-Modells brechen, sind durch

$$\rho_{p,n} = (1 - \chi_{p,n}^2)(1 - \chi_{p,n}^4) \quad (\text{E.1})$$

gegeben, wobei $\chi_{p,n} = m_{\text{Meson}}/m_{p,n}$ der Quotient aus Mesonmasse und Masse des Protons beziehungsweise Neutrons ist ($m_p = 938.27231$ MeV, $m_n = 939.56563$ MeV [7]). Tabelle E.3 gibt die entsprechenden Werte für die relevanten Mesonen an.

E.4 Übergangsamplituden

In diesem Abschnitt sind die Resultate für die hadronischen Übergangsamplituden und -wahrscheinlichkeiten der Nukleonenzerfälle zusammengefaßt. Tabelle E.4 zeigt die Amplituden der elementaren Zerfallsprozesse des Protons und des Neutrons. Alle dort nicht aufgelisteten Amplituden lassen sich durch Symmetriüberlegungen herleiten. So unterscheiden sich die Amplituden mit Antileptonen der zweiten und dritten Familie im Endzustand von denen mit e^+ und ν_e^C lediglich durch die Vorfaktoren A_i ; diese lassen sich (5.3) entnehmen.

Meson	ρ_p	ρ_n	Meson	ρ_p	ρ_n
π^0	0.97889	0.97895	ρ^0	0.17842	0.18025
π^\pm	0.97739	0.97746	ρ^\pm	0.17842	0.18025
K^\pm	0.66774	0.66875	ω	0.15812	0.15993
K^0	0.66178	0.66280	$K^{*\pm}$	0.01787	0.01877
η	0.58338	0.58462	K^{*0}	0.01476	0.01560

Tabelle E.3: Phasenraumfaktoren für Proton- und Neutronzerfälle in Abhängigkeit vom Meson im Endzustand

Die Übergangsamplituden mit linkshändigen Antileptonen erhält man aus denjenigen mit rechtshändigen Antileptonen, indem man \bar{l}_R^C durch \bar{l}_L^C ersetzt und die Spineinstellungen \uparrow und \downarrow der Quarks vertauscht. Auch hier ändern sich lediglich die Vorfaktoren A_i gemäß (5.3), die numerischen Werte der Amplituden in der dritten Spalte bleiben gleich. Tabelle E.5 listet die Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse mit physikalischen Teilchen in den Endzuständen auf.

Zerfallsprozeß	Lagrangedichte-Term	Amplitude ($\cdot\sqrt{30}$)	Vorfaktor
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-4	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-8	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ d^C \uparrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-8	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ d^C \downarrow d\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+2	A_2
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-10	A_2
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ d^C \downarrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-2	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ s^C \uparrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	-8	A_6
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ s^C \downarrow d\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	+2	A_6
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ s^C \downarrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	-2	A_6
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+4	A_9
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-10	A_9
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-8	A_9
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+2	A_{11}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	0	A_{13}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-12	A_{13}
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-12	A_{13}

Zerfallsprozeß	Lagrangedichte-Term	Amplitude ($\cdot\sqrt{30}$)	Vorfaktor
$n \uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-4	A_2
$n \uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+10	A_2
$n \downarrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+8	A_2
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \uparrow u \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+8	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \downarrow u \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-2	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+4	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+8	A_9
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \downarrow u \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+2	A_9
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+10	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	-4	A_{11}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	0	A_{13}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+12	A_{13}
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	-2	A_{11}
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+12	A_{13}

Tabelle E.4: Übergangsamplituden für die Elementarprozesse der Nukleonenzerfälle

E.5 Experimentelle Grenzen für die Nukleonzerfallsraten

Tabelle E.6 zeigt die in [7] angegebenen Untergrenzen für die inversen partiellen Zerfallsraten der Nukleonen aufgrund der experimentellen Nichtbeobachtung dieser Prozesse. Die aktuellsten Resultate des Super-Kamiokande-Experiments Nukleonenzerfälle betreffend sind in Tabelle 5.3 zu finden.

E.6 Zerfallsraten der Nukleonen

In diesem Abschnitt sind in den Tabellen E.7-E.10 die numerischen Resultate für die partiellen und totalen Nukleonzerfallsraten zusammengefaßt. Neben den Ergebnissen für die drei untersuchten Modelle ist zum Vergleich auch der Fall verschwindender Fermionmischungen berücksichtigt worden. Während die Einträge 0.0 für partielle Raten $< 0.05\%$ stehen, sind Zerfälle in die mit „—“ gekennzeichneten Kanäle in führender Ordnung nicht erlaubt. Es gilt $\Gamma = \sum_j \Gamma_j$ sowie $\tau = 1/\Gamma$ und weiterhin in natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) $1 \text{ GeV} = 4.77 \cdot 10^{31} \text{ yr}^{-1}$.

Zerfallsprozeß	Amplitude · Vorfaktor ²	Zerfallsprozeß	Amplitude · Vorfaktor ²
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \pi^0$	$(49/30) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow e_R^+ \pi^-$	$(49/15) A_2^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ K^0$	$(5/3) A_6^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \pi^0$	$(49/30) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \eta$	$(1/10) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K^0$	$(4/15)(2 A_{11} - 3 A_{13})^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \pi^+$	$(49/15) A_9^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \eta$	$(1/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K^+$	$(1/15)(A_{11} + 6 A_{13})^2$	$n \uparrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(0)}^-$	$(3/5) A_2^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(0)}^0$	$(3/10) A_2^2$	$n \downarrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(-)}^-$	$(32/15) A_2^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(-)}^0$	$(16/15) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(0)}^0$	$(3/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \omega_{(0)}$	$(27/10) A_2^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(-)}^0$	$(16/15) A_9^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ \omega_{(-)}$	$(12/5) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \omega_{(0)}^0$	$(27/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ K_{(0)}^{*0}$	$(3/5) A_6^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \omega_{(-)}^0$	$(12/5) A_9^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ K_{(-)}^{*0}$	$(2/15) A_6^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(0)}^{*0}$	$(12/5) A_{13}^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(0)}^+$	$(3/5) A_9^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(-)}^{*0}$	$(2/15)(A_{11} - 6 A_{13})^2$
$p \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(-)}^+$	$(32/15) A_9^2$		
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(0)}^{*+}$	$(3/5)(A_{11} - 2 A_{13})^2$		
$p \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(-)}^{*+}$	$(8/15)(A_{11} - 3 A_{13})^2$		

Tabelle E.5: Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse der Nukleonen mit physikalischen Endzuständen

Zerfallskanal	$1/\Gamma_i$ (10^{30} yr)	Zerfallskanal	$1/\Gamma_i$ (10^{30} yr)
$p \rightarrow e^+ \pi^0$	> 550	$n \rightarrow e^+ \pi^-$	> 130
$p \rightarrow e^+ K^0$	> 150	$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	> 100
$p \rightarrow e^+ \eta$	> 140	$n \rightarrow e^+ \rho^-$	> 58
$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	> 270	$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	> 23
$p \rightarrow \mu^+ K^0$	> 120	$n \rightarrow \nu^C \pi^0$	> 100
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	> 69	$n \rightarrow \nu^C K^0$	> 86
$p \rightarrow e^+ \rho^0$	> 75	$n \rightarrow \nu^C \eta$	> 54
$p \rightarrow e^+ \omega$	> 45	$n \rightarrow \nu^C \rho^0$	> 19
$p \rightarrow e^+ K^{*0}$	> 52	$n \rightarrow \nu^C \omega$	> 43
$p \rightarrow \mu^+ \rho^0$	> 110	$n \rightarrow \nu^C K^{*0}$	> 22
$p \rightarrow \mu^+ \omega$	> 57		
$p \rightarrow \nu^C \pi^+$	> 25		
$p \rightarrow \nu^C K^+$	> 100		
$p \rightarrow \nu^C \rho^+$	> 27		
$p \rightarrow \nu^C K^{*+}$	> 20		

Tabelle E.6: Experimentelle Grenzen für die Lebensdauern $1/\Gamma_i$ der Nukleonen [7]

Zerfallskanal des Protons	Raten in % (keine Mischungen)	Raten in % in Modell 1	Raten in % in Modell 2a	Raten in % in Modell 2b
$p \rightarrow e^+ \pi^0$	33.6	21.4	25.1	27.8
$p \rightarrow e^+ K^0$	—	3.1	2.6	4.5
$p \rightarrow e^+ \eta$	1.2	0.8	0.9	1.0
$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	—	8.5	5.7	5.6
$p \rightarrow \mu^+ K^0$	5.8	2.6	0.9	1.8
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	—	0.3	0.2	0.2
$p \rightarrow e^+ \rho^0$	5.1	3.3	3.8	4.2
$p \rightarrow e^+ \omega$	16.9	10.8	12.7	14.0
$p \rightarrow e^+ K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \mu^+ \rho^0$	—	1.3	0.9	0.8
$p \rightarrow \mu^+ \omega$	—	4.3	2.9	2.8
$p \rightarrow \nu_e^C \pi^+$	32.3	25.6	35.6	27.7
$p \rightarrow \nu_e^C K^+$	—	2.0	2.0	4.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C \pi^+$	—	8.9	0.5	0.3
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^+$	0.1	1.3	0.2	0.3
$p \rightarrow \nu_e^C \rho^+$	4.9	3.9	5.4	4.2
$p \rightarrow \nu_e^C K^{*+}$	—	0.4	0.3	0.6
$p \rightarrow \nu_\mu^C \rho^+$	—	1.4	0.1	0.0
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^{*+}$	0.1	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C \pi^+$	—	0.1	0.1	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^+$	—	0.1	0.1	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C \rho^+$	—	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^{*+}$	—	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow e^+ X^0$	56.8	39.4	45.1	51.5
$p \rightarrow \mu^+ X^0$	5.8	17.0	10.6	11.2
$p \rightarrow \nu^C X^+$	37.4	43.7	44.3	37.2

Tabelle E.7: Partielle Zerfallsraten Γ_i/Γ des Protons für den Fall der Vernachlässigung von Fermionmischungen und für die untersuchten Lösungen

Größe	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
Γ_p	$2.54 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$	$2.57 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$	$2.83 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$
τ_p	$3.94 \cdot 10^{34} \text{ yr}$	$3.89 \cdot 10^{34} \text{ yr}$	$3.53 \cdot 10^{34} \text{ yr}$

Tabelle E.8: Totale Zerfallsraten und Lebensdauern des Protons

Zerfallskanal des Neutrons	Raten in % (keine Mischungen)	Raten in % in Modell 1	Raten in % in Modell 2a	Raten in % in Modell 2b
$n \rightarrow e^+ \pi^-$	62.9	40.1	46.2	49.9
$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	—	15.8	10.4	10.0
$n \rightarrow e^+ \rho^-$	9.7	6.2	7.1	7.7
$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	—	2.4	1.6	1.5
$n \rightarrow \nu_e^C \pi^0$	15.1	12.0	16.4	12.5
$n \rightarrow \nu_e^C K^0$	—	6.8	4.9	8.2
$n \rightarrow \nu_e^C \eta$	0.6	0.4	0.6	0.5
$n \rightarrow \nu_\mu^C \pi^0$	—	4.2	0.2	0.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^0$	1.7	0.1	1.0	0.9
$n \rightarrow \nu_\mu^C \eta$	—	0.2	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_e^C \rho^0$	2.3	1.8	2.5	1.9
$n \rightarrow \nu_e^C \omega$	7.7	6.1	8.4	6.4
$n \rightarrow \nu_e^C K^{*0}$	—	0.2	0.2	0.4
$n \rightarrow \nu_\mu^C \rho^0$	—	0.6	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \omega$	—	2.1	0.1	0.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^{*0}$	0.0	0.1	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \pi^0$	—	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^0$	—	0.7	0.4	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \eta$	—	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \rho^0$	—	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \omega$	—	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow e^+ X^-$	72.6	46.3	53.3	57.6
$n \rightarrow \mu^+ X^-$	—	18.2	12.0	11.5
$n \rightarrow \nu^C X^0$	27.4	35.3	34.7	31.0

Tabelle E.9: Partielle Zerfallsraten Γ_i/Γ des Neutrons für den Fall der Vernachlässigung von Fermionmischungen und für die untersuchten Lösungen

Größe	Wert in Modell 1	Wert in Modell 2a	Wert in Modell 2b
Γ_n	$2.72 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$	$2.80 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$	$3.14 \cdot 10^{-35} \text{ yr}^{-1}$
τ_n	$3.68 \cdot 10^{34} \text{ yr}$	$3.57 \cdot 10^{34} \text{ yr}$	$3.18 \cdot 10^{34} \text{ yr}$

Tabelle E.10: Totale Zerfallsraten und Lebensdauern des Neutrons

Literaturverzeichnis

- [1] S. Dimopoulos, L. J. Hall und S. Raby, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 1984.
- [2] W. N. Cottingham und D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [3] D. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343, Phys. Rev. **D 8** (1973) 3633, Phys. Rev. **D 9** (1974) 980; H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346, Phys. Rep. **14 C** (1974) 129; H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. **47 B** (1973) 365.
- [4] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579; A. Salam und J. C. Ward, Phys. Lett. **13** (1964) 168; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264; A. Salam in *Elementary Particle Theory*, Hrsg. N. Svartholm, Almquist & Forlag, Stockholm 1968.
- [5] G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189; G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 61** (1973) 455.
- [6] E. C. G. Stückelberg und A. Peterman, Helv. Phys. Acta **26** (1953) 499; M. Gell-Mann und F. E. Low, Phys. Rev. **95** (1954) 1300.
- [7] C. Caso et. al. (Particle Data Group), Eur. Phys. J. **C 3** (1998) 1.
- [8] S. L. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426; J. S. Bell und R. Jackiw, Nuovo Cim. **60 A** (1969) 47.
- [9] H. Georgi und S. L. Glashow, Phys. Rev. **D 6** (1972) 429.
- [10] D. Gross und R. Jackiw, Phys. Rev. **D 6** (1972) 477; C. Bouchiat, J. Iliopoulos und P. Meyer, Phys. Rev. Lett. **38 B** (1972) 519.
- [11] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 132, Phys. Rev. **145** (1966) 1156.
- [12] ALEPH-, DELPHI-, L3- und OPAL-Kollaborationen, CERN-EP-99-060 (1999).
- [13] H. Fusaoka und Y. Koide, Phys. Rev. **D 57** (1998) 3986.
- [14] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531; M. Kobayashi und M. Maskawa, Progr. Theor. Phys. **49** (1973) 652.

- [15] A. Riotto, CERN-TH-98-204 und hep-ph/9807454 (1998).
- [16] S. M. Bilenky, C. Giunti und W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 1.
- [17] P. Langacker (Hrsg.), *Precision Tests of the Standard Electroweak Model*, World Scientific, Singapur 1995.
- [18] R. D. Peccei und H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1440, Phys. Rev. **D 16** (1977) 1791.
- [19] C. D. Froggatt und H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B 147** (1979) 277.
- [20] P. Langacker, Phys. Rep. **72 C** (1981) 185.
- [21] A. Masiero in *Grand Unification with and without Supersymmetry and Cosmological Implications*, World Scientific, Singapur 1984; G. G. Ross, *Grand Unified Theories*, Benjamin/Cummings, Menlo Park 1985.
- [22] H. Georgi, H. R. Quinn und S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 451.
- [23] H. Arason, D. J. Castaño, B. Kesthelyi, S. Mikaelian, E. J. Piard, P. Ramond und B. D. Wright, Phys. Rev. **D 46** (1992) 3945.
- [24] U. Amaldi, W. de Boer und H. Fürstenau, Phys. Lett. **B 260** (1991) 447.
- [25] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin/Cummings, Reading 1982.
- [26] R. Slansky, Phys. Rep. **79 B** (1981) 1.
- [27] F. Wilczek, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77** (1999) 511.
- [28] M. Gell-Mann, P. Ramond und R. Slansky, Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 721.
- [29] M. L. Mehta, J. Math. Phys. **7** (1966) 1824; M. L. Mehta und P. K. Srivastava, J. Math. Phys. **7** (1966) 1833.
- [30] F. Gürsey, P. Ramond und P. Sikivie, Phys. Lett. **60 B** (1976) 177.
- [31] J. Banks und H. Georgi, Phys. Rev. **D 14** (1976) 1159; S. Okubo, Phys. Rev. **D 16** (1977) 3528.
- [32] H. Georgi, Nucl. Phys. **B 156** (1979) 126.
- [33] H. Georgi und S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438; A. J. Buras, J. Ellis, M. K. Gaillard und D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. **B 135** (1978) 66.
- [34] M. Machacek, Nucl. Phys. **B 159** (1979) 37; J. Ellis, M. K. Gaillard und D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. **88 B** (1979) 320.

- [35] B. Viren für die Super-Kamiokande-Kollaboration, SBHEP-99-1 und hep-ex/9903029 (1999).
- [36] H. Georgi und C. Jarlskog, Phys. Lett. **86 B** (1979) 297.
- [37] L.-F. Li, Phys. Rev. **D 9** (1974) 1723.
- [38] E. Gildener, Phys. Rev. **D 14** (1976) 1667.
- [39] F. del Aguila und L. E. Ibañez, Nucl. Phys. **B 177** (1981) 60.
- [40] H. Georgi in *Particles and Fields*, Hrsg. C. E. Carlson, AIP Press, New York 1975; H. Fritzsch und P. Minkowski, Ann. Phys. **93** (1975) 193.
- [41] S. Rajpoot, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2244; R. W. Robinett und J. L. Rosner, Phys. Rev. **D 26** (1982) 2396; Y. Tosa, G. C. Branco und R. E. Marshak, Phys. Rev. **D 28** (1983) 1731; D. Chang, R. N. Mohapatra und M. K. Parida, Phys. Rev. **D 30** (1984) 1052; J. M. Gipson und R. E. Marshak, Phys. Rev. **D 31** (1985) 1705; D. Chang, R. N. Mohapatra, J. M. Gipson, R. E. Marshak und M. K. Parida, Phys. Rev. **D 31** (1985) 1718.
- [42] N. G. Deshpande, E. Keith und P. B. Pal, Phys. Rev. **D 46** (1992) 2261, Phys. Rev. **D 47** (1993) 2892.
- [43] V. A. Kuzmin und M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **92 B** (1980) 115.
- [44] F. Acampora, G. Amelino-Camelia, F. Buccella, O. Pisanti, L. Rosa und T. Tuzi, Nuovo Cim. **108 A** (1995) 375.
- [45] J. Pati und A. Salam, Phys. Rev. **D 10** (1974) 275.
- [46] M. S. Chanowitz, J. Ellis und M. K. Gaillard, Nucl. Phys. **B 128** (1977) 506; R. Barbieri, D. V. Nanopoulos, G. Morchio und F. Strocchi, Phys. Lett. **90 B** (1980) 91.
- [47] H. Georgi und S. L. Glashow, Phys. Rev. **D 7** (1973) 245; G. C. Branco und G. Senjanovic, Phys. Rev. **D 18** (1978) 162.
- [48] M. Magg und C. Wetterich, Phys. Lett. **94 B** (1980) 61.
- [49] H. Georgi und D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. **82 B** (1978) 95.
- [50] M. S. Turner, astro-ph/9901109 (1999); D. O. Caldwell, UCSB-HEP-99-01 und hep-ph/9902219 (1999); M. Fukugita, G.-C. Liu und N. Sugiyama, KUNS-1596 und hep-ph/9908450 (1999).
- [51] M. Gell-Mann, P. Ramond und R. Slansky in *Supergravity*, Hrsg. P. van Nieuwenhuizen und D. Z. Friedman, North Holland, Amsterdam 1979; T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1103.

- [52] Y. Achiman und B. Stech, Phys. Lett. **77 B** (1978) 389; R. Barbieri und D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. **91 B** (1980) 369.
- [53] Y. Achiman und A. Lukas, Nucl. Phys. **B 384** (1992) 78.
- [54] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6** (1958) 429, Sov. Phys. JETP **7** (1958) 172.
- [55] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D 17** (1978) 2369.
- [56] S. P. Mikheyev und A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 441, Nuovo Cim. **9 C** (1986) 17.
- [57] J. N. Bahcall und R. K. Ulrich, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 297; J. N. Bahcall und M. H. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. **67** (1995) 781.
- [58] J. N. Bahcall, P. I. Krastev und A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D 58** (1998) 096016.
- [59] Y. Fukuda et. al. (Kamiokande-Kollaboration), Phys. Lett. **B335** (1994) 237.
- [60] Y. Fukuda et. al. (Super-Kamiokande-Kollaboration), Phys. Lett. **B436** (1998) 33, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562.
- [61] C. Bemporad et. al. (CHOOZ-Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77** (1999) 159.
- [62] K. Eitel et. al. (KARMEN-Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77** (1999) 212.
- [63] A. Bazarko, hep-ex/9906003 (1999).
- [64] L. J. Hall, Nucl. Phys. **B 178** (1981) 75.
- [65] M. K. Parida, Phys. Rev. **D 57** (1998) 2736.
- [66] S. Weinberg, Phys. Lett. **91 B** (1980) 51.
- [67] D. Lee, R. N. Mohapatra, M. K. Parida und M. Rani, Phys. Rev. **D 51** (1995) 229; R. N. Mohapatra und M. K. Parida, Phys. Rev. **D 47** (1993) 264.
- [68] H. Fritzsch, Phys. Lett. **70 B** (1977) 436, Phys. Lett. **73 B** (1978) 317, Nucl. Phys. **B 155** (1979) 189.
- [69] K. Kang, J. Flanz und E. Paschos, Z. Phys. **C 55** (1992) 75.
- [70] H. Georgi und D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. **82 B** (1979) 392, Nucl. Phys. **B 155** (1979) 52.
- [71] K. S. Babu und Q. Shafi, Phys. Rev. **D 47** (1993) 5004, Phys. Lett. **B 311** (1993) 172.
- [72] P. Ramond, R. G. Roberts und G. G. Ross, Nucl. Phys. **B 406** (1993) 19.

- [73] Z. Berezhiani, INFN-FE-21-95 und hep-ph/9602325 (1996).
- [74] Z. Berezhiani und A. Rossi, JHEP **03** (1999) 002.
- [75] K. S. Babu und Q. Shafi, Phys. Lett. **B 357** (1995) 365; K. S. Babu, J. C. Pati und F. Wilczek, OSU-HEP-98-11 und hep-ph/9812538 (1998).
- [76] H. Georgi und D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. **B 159** (1979) 16.
- [77] G. C. Branco, L. Lavoura und F. Mota, Phys. Rev. **D 39** (1989) 3443.
- [78] A. Davidson, V. P. Nair und K. C. Wali, Phys. Rev. **D 29** (1984) 1504, Phys. Rev. **D 29** (1984) 1513; Y. Achiman und T. Greiner, Nucl. Phys. **B 443** (1995) 3.
- [79] M. Olechowski und S. Pokorski, Phys. Lett. **B 257** (1991) 388.
- [80] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.
- [81] L. Baudis et. al. (Heidelberg-Moskau-Kollaboration), Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 41.
- [82] E. W. Kolb und M. S. Turner, *The early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City 1990.
- [83] A. D. Sakharov, JETP Lett. **91 B** (1967) 24.
- [84] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
- [85] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov und M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B 155** (1985) 36.
- [86] M. Fukugita und T. Yanagida, Phys. Lett. **174** (1986) 45.
- [87] A. Riotto und M. Trodden, CERN-TH-99-04 und hep-ph/9901362 (1999).
- [88] C. Jarlskog und F. Ynduráin, Nucl. Phys. **B 144** (1979) 29; J. F. Donoghue und G. Karl, Phys. Rev. **D 24** (1981) 230.
- [89] G. Kane und G. Karl, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2808.
- [90] M. B. Gavela, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène und J. C. Raynal, Phys. Rev. **D 23** (1981) 1580.
- [91] H. Din, G. Girardi und P. Sorba, Phys. Lett. **91 B** (1980) 77; J. F. Donoghue, Phys. Lett. **92 B** (1980) 99; E. Golowich, Phys. Rev. **D 22** (1980) 1148, Phys. Rev. **D 24** (1981) 2899.
- [92] Y. Tomozawa, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 463; V. S. Berezinsky B. L. Ioffe und Y. I. Kogan, Phys. Lett. **105 B** (1981) 33; L. F. Abbott, R. Blankenbecler und M. B. Wise, Phys. Rev. **D 23** (1981) 1591.

- [93] M. Isgur und M. B. Wise, Phys. Lett. **117 B** (1982) 179.
- [94] W. Lucha, Fortschr. Phys. **33** (1985) 547.
- [95] Y. Hara, Nucl. Phys. **B 214** (1983) 167.
- [96] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1964.
- [97] L. F. Abbott und M. B. Wise, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2208; M. Daniel und J. A. Peñarrocha, Nucl. Phys. **B 236** (1984) 467.
- [98] F. Buccella, G. Miele, L. Rosa, P. Santorelli und T. Tuzi, Phys. Lett. **B 233** (1989) 178.
- [99] A. J. Buras, TUM-HEP-316-98 und hep-ph/9806471 (1998).
- [100] J. Bolz und P. Kroll, Z. Phys. **A 356** (1996) 327.
- [101] P. Langacker in *Inner Space, Outer Space*, Hrsg. E. W. Kolb, University of Chicago Press, Chicago 1986.
- [102] C. McGrew et. al. (IMB 3-Kollaboration), Phys. Rev. **D 59** (1999) 052004.
- [103] M. Shiozawa et. al. (Super-Kamiokande-Kollaboration), Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3319; Y. Hayato et. al. (Super-Kamiokande-Kollaboration), Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1529.
- [104] C. Berger et. al. (Fréjus-Kollaboration), Z. Phys. **C 50** (1991) 385, Phys. Lett. **B 269** (1991) 227.
- [105] W. W. M. Allison et. al. (Soudan 2-Kollaboration), Phys. Lett. **B 427** (1998) 217; D. Wall et. al. (Soudan 2-Kollaboration), hep-ex/9910026 (1999).
- [106] F. Arneodo et. al. (ICARUS-Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **70** (1999) 453.
- [107] Y. Nir, IASSNS-HEP-99-96 und hep-ph/9911321 (1999).
- [108] G. F. Giudice, hep-ph/9912279 (1999).
- [109] L. E. Ibañez, FTUAM-99-37 und hep-ph/9911499 (1999).
- [110] M. E. Machacek und M. T. Vaughn, Nucl. Phys. **B 222** (1983) 83, Nucl. Phys. **B 236** (1984) 221, Nucl. Phys. **B 249** (1985) 70.
- [111] P. H. Chankowski und Z. Pluciennik, Phys. Lett. **B 316** (1993) 312; K. S. Babu, C. N. Leung und J. Pantaleone, Phys. Lett. **B 319** (1993) 191.

Schlußwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich während der letzten drei Jahre auf die eine oder andere Weise unterstützt haben.

Zunächst gilt mein Dank Prof. Dr. Yoav Achiman, der dieses Projekt angeregt und betreut hat. Er hat durch sein ständiges Interesse, die stete Bereitschaft zu ausgiebigen Diskussionen und zahlreiche physikalische Ideen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Dank auch den übrigen Mitgliedern des Prüfungsausschusses, Prof. Dr. Peter Kroll als Zweitgutachter der Dissertation sowie Prof. Dr. Jürgen Drees und Dr. Peer Ueberholz.

Dr. Mina Parida war mir während seines Forschungsaufenthaltes in Wuppertal mit seinem Fachwissen eine sehr große Hilfe und stets bereit, sich mit meinem Fragen zu beschäftigen. Ebenso danke ich Prof. Dr. Franco Buccella, Dr. Ofelia Pisanti und Dr. Pietro Santorelli für die aufschlußreichen Diskussionen währen der Sommerschule auf Capri.

Dank auch allen Kollegen am Institut, insbesondere aber meinen Mitstreitern aus F 10.09. Marcus Richter, Dr. Armin Seyfried, Thorsten Struckmann und Dr. Jochen Viehoff verdanke ich eine überaus angenehme Arbeitsatmosphäre während der vergangenen drei Jahre. Auch die Hilfe von Norbert Eicker in EDV-Dingen sowie von Sabine Hoffmann und Anita Wied aus dem Sekretariat in allen organisatorischen Fragen ist nicht zu unterschätzen.

Meiner Familie und meinem Freundeskreis gebührt ebenfalls großer Dank. Meine Eltern haben mich während meines gesamten Studiums in jeder Weise tatkräftig unterstützt. Den Freunden, allen voran aber Christine Rempel, sei für ihre große Geduld und Aufmunterung vor allem in der Endphase meiner Promotion gedankt.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft schließlich bin ich für die finanzielle Unterstützung in Form eines Stipendiums im Rahmen des Graduiertenkollegs „Feldtheoretische und numerische Methoden der Elementarteilchen- und Statistischen Physik“ überaus dankbar.

Carsten Merten

Wuppertal, Dezember 1999

